Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2022/2023

8 gennaio 2024 - IV appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Indicato con Q il quadrilatero compatto e convesso di vertici $(1,1)$, $(2,1)$, $(4,2)$ e $(2,2)$, si calcoli

$$\int_Q \frac{y^2}{x^3} \cos\left(\frac{y}{x}\right)\, dL^2(x,y).$$

[Suggerimento: sfruttare il fatto che due lati di Q sono inclusi nelle rette $y = x$ e $y = x/2$]

Risoluzione. Si osservi che Q è la regione limitata di piano racchiusa dalle rette di equazione

$$y = x, \quad y = x/2, \quad y = 1, \quad y = 2.$$

Pertanto, il sistema

$$y = sx, \quad y = t$$

rappresenta una corrispondenza biunivoca fra Q e il rettangolo

$$R := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/2 \leq s \leq 1,\ 1 \leq t \leq 2\}.$$

Naturalmente tale sistema equivale a

$$x = t/s, \quad y = t$$

e da questo segue facilmente che

$$\varphi : R \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(s,t) := (t/s, t)$$

è una $(2,2)$-parametrizzazione regolare di Q. E' facile calcolare che

$$J\varphi(s,t) = |\det D\varphi(s,t)| = t/s^2, \text{ per ogni } (s,t) \in (1/2,1) \times (1,2).$$

Quindi, per la formula dell'area,

$$\begin{aligned} I :&= \int_{Q=\varphi(R)} \frac{y^2}{x^3} \cos\left(\frac{y}{x}\right)\, dL^2(x,y) \\ &= \int_R \frac{t^2}{(t/s)^3} \cos\left(\frac{t}{t/s}\right) \frac{t}{s^2}\, dL^2(s,t) \cdot \\ &= \int_R s \cos s \, dL^2(s,t) \end{aligned}$$

Dal teorema di Fubini, dalla formula di integrazione per parti e dal teorema fondamentale del calcolo, si ottiene infine

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\int_{1/2}^1 s \cos s \, ds \right) dt = \int_{1/2}^1 s \cos s \, ds \\ &= (s \sin s)_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 \sin s \, ds \\ &= \sin 1 - \frac{\sin(1/2)}{2} + \cos 1 - \cos(1/2). \end{aligned}$$

2. Posto

$$C_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 4,\ x = 0\}$$

e

$$C_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + (z - 2\sqrt{2})^2 = 4,\ x = 0\},$$

sia C l'insieme dei punti di $C_1 \cup C_2$ che sono contenuti nel quadrato di vertici

$$(0,0,0), \quad (0,\sqrt{2},\sqrt{2}), \quad (0,0,2\sqrt{2}), \quad (0,-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

Indicata con S la superficie ottenuta dalla rotazione completa di C intorno all'asse z, si dia una rappresentazione grafica qualitativa di S e si calcoli $H^2(S)$.

Risoluzione. Osserviamo che S è una superficie regolare a tratti, coi seguenti due tratti regolari:

$$S_- := \left\{(x,y,z) \in S \mid z \le \sqrt{2}\right\}, \quad S_+ := \left\{(x,y,z) \in S \mid z \ge \sqrt{2}\right\}.$$

Naturalmente si ha $H^2(S_+) = H^2(S_-)$ e quindi

$$H^2(S) = H^2(S_-) + H^2(S_+) = 2H^2(S_+). \tag{1}$$

Una $(2,3)$-parametrizzazione regolare di S_+ è data da

$$\varphi : R := [\pi/4, \pi/2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

con

$$\varphi(\alpha,\beta) := (2\cos\alpha\cos\beta, 2\cos\alpha\sin\beta, 2\sin\alpha).$$

Si verifica facilmente che

$$J\varphi(\alpha,\beta) = \|D_1\varphi(\alpha,\beta) \times D_2\varphi(\alpha,\beta)\| = 4\cos\alpha,$$

per ogni $(\alpha,\beta) \in (\pi/4, \pi/2) \times (0, 2\pi)$. Quindi, usando la formula dell'area, il teorema di Fubini e il teorema fondamentale del calcolo,

$$\begin{aligned} H^2(S_+) &= \int_{S_+ = \varphi(R)} 1\, dH^2 = \int_R J\varphi\, dL^2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} 4\cos\alpha\, d\beta \right) d\alpha \\ &= 8\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\alpha\, d\alpha = 8\pi (\sin\alpha)_{\pi/4}^{\pi/2} = 4\pi\left(2 - \sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Sostituendo questo risultato in (1), otteniamo infine

$$H^2(S) = 8\pi\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica tale che

$$f(x) = \sin(|x|^{1/2}), \text{ se } x \in [-\pi, \pi).$$

- Tracciare il grafico di f.
- Descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di f.
- Calcolare b_n (per ogni $n \geq 1$) e a_0.

Risoluzione. Ricordiamo che, per applicare la teoria L^2 della serie di Fourier, va considerato lo spazio con misura $([-\pi, \pi], \mathcal{M}_\varphi, \varphi|_{\mathcal{M}_\varphi})$ indotto dalla misura esterna $\varphi := \mathcal{L}^1|_{2^{[-\pi,\pi]}} : 2^{[-\pi,\pi]} \to [0, +\infty]$ e quindi il corrispondente spazio di Hilbert $(\mathcal{L}^2([-\pi, \pi]), |\!|\!| \cdot |\!|\!|_2)$, solitamente indicato più semplicemente con la notazione "pre", cioè $(L^2(-\pi, \pi), \| \cdot \|_2)$. Osserviamo poi che $f|_{[-\pi,\pi]}$ è continua e dunque misurabile. Quindi anche $(f|_{[-\pi,\pi]})^2$ è misurabile. Inoltre essa è non negativa e limitata e pertanto è sommabile, i.e., $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^2(-\pi, \pi)$. Allora, dalla teoria L^2 della serie di Fourier si ottiene che:

- La serie di Fourier di f converge a $f|_{[-\pi,\pi]}$ in L^2;
- La serie di Fourier di f converge puntualmente $(\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}})$-q.o. a f.

Osserviamo che la teoria classica della serie di Fourier non è applicabile a f in quanto per ogni $x \in (0, \pi)$ si ha $f'(x) = \frac{\cos(x^{1/2})}{2x^{1/2}}$ e quindi f' non è limitata in un intorno di 0 (dunque f non è regolare a tratti).

Osserviamo poi che f è pari. Pertanto:

- $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$;
- Dalla formula per il cambiamento di variabile nell'integrale ($t = x^2$), dalla formula di integrazione per parti e dal teorema fondamentale del calcolo, segue che

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(t^{1/2})\, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x\, dx \\ &= \frac{4}{\pi} \left[(-x \cos x)_0^{\sqrt{\pi}} + \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos x\, dx \right] \\ &= \frac{4}{\pi} (\sin \sqrt{\pi} - \sqrt{\pi} \cos \sqrt{\pi}). \end{aligned}$$