Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2022/2023

8 febbraio 2024 - V appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Sia E il solido ottenuto dalla rotazione completa intorno all'asse z del triangolo avente come vertici $(0,0,0)$, $(0,2,1)$ e $(0,1,1)$. Fornire una rappresentazione grafica qualitativa di E e calcolare

$$\int_E z\cos(x^2+y^2)\,dL^3.$$

Risoluzione. Osserviamo che $E_z = \emptyset$ per ogni $z \notin [0,1]$ e quindi, per il teorema di Fubini, si ha

$$\begin{aligned}
I := & \int_E z\cos(x^2+y^2)\,dL^3 \\
= & \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{E_z} z\cos(x^2+y^2)\,dL^2(x,y) \right) dL^1(z) \qquad (1)\\
= & \int_{[0,1]} z \left(\int_{E_z} \cos(x^2+y^2)\,dL^2(x,y) \right) dL^1(z).
\end{aligned}$$

Inoltre, se $z \in [0,1]$, la sezione E_z è la corona circolare centrata in $(0,0)$ di raggi z e $2z$. Quindi una $(2,2)$-parametrizzazione regolare di E_z è data da

$$\varphi : C := [z,2z]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

Ricordiamo che

$$J\varphi(\rho,\theta) = \rho, \text{ per ogni } (\rho,\theta) \in (z,2z)\times(0,2\pi).$$

Allora, dalla formula dell'area, dal teorema di Fubini e dal teorema fondamentale del calcolo, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{E_z=\varphi(C)} \cos(x^2+y^2)\, dL^2(x,y) &= \int_C \rho\cos(\rho^2)\, dL^2(\theta,\rho) \\
&= \int_{[0,2\pi]} \left(\int_{[z,2z]} \rho\cos(\rho^2)\, dL^1(\rho) \right) dL^1(\theta) \\
&= 2\pi \int_z^{2z} \rho\cos(\rho^2)\, d\rho \\
&= \pi\big(\sin(\rho^2)\big)_{\rho=z}^{\rho=2z} \\
&= \pi(\sin(4z^2)-\sin(z^2)).
\end{aligned}$$

Sostituendo questo risultato in (1) e applicando il teorema fondamentale del calcolo, troviamo

$$\begin{aligned}
I &= \pi \int_0^1 z(\sin(4z^2)-\sin(z^2))\, dz \\
&= \pi\left[\left(\frac{\cos(4z^2)}{8} \right)_{z=1}^{z=0} + \left(\frac{\cos(z^2)}{2} \right)_{z=0}^{z=1} \right] \\
&= \frac{(4\cos 1 - \cos 4 - 3)\pi}{8}.
\end{aligned}$$

2. Sia
$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x^2\}$$
e sia G il grafico della funzione
$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = y.$$
Fornire una rappresentazione grafica qualitativa di ∂G e calcolare l'integrale
$$\int_{\partial G} x \, dH^1(x,y,z).$$

Risoluzione. Osserviamo che ∂G è una curva regolare a tratti coi seguenti tre tratti regolari:
$$C_1 := [0,1] \times \{(0,0)\}, \quad C_2 := \{(x, 1-x^2, 1-x^2) \,|\, 0 \le x \le 1\}$$
e
$$C_3 := \{(0,y,y) \,|\, 0 \le y \le 1\}.$$
Poniamo
$$I := \int_{\partial G} x \, dH^1(x,y,z)$$
e
$$I_j := \int_{C_j} x \, dH^1(x,y,z) \qquad (j = 1,2,3).$$
Ovviamente si ha $I_3 = 0$ e quindi
$$I = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 + I_2. \tag{2}$$
Ora, una $(1,3)$-parametrizzazione regolare di C_1 è data da
$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (t,0,0),$$
mentre una $(1,3)$-parametrizzazione regolare di C_2 è
$$\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \beta(t) = (t, 1-t^2, 1-t^2).$$
Osserviamo che
$$\|\alpha'(t)\| = 1, \quad \|\beta'(t)\| = \sqrt{1+8t^2} \qquad (t \in (0,1)).$$
Dalla formula dell'area e dal teorema fondamentale del calcolo otteniamo allora
$$I_1 = \int_{C_1 = \alpha([0,1])} x \, dH^1(x,y,z) = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2} \tag{3}$$
e

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{C_2=\beta([0,1])} x\, dH^1(x,y,z) = \int_0^1 t\,\sqrt{1+8t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{16}\int_0^1 \sqrt{1+8t^2}\,D(1+8t^2)\,dt = \frac{1}{24}\big[(1+8t^2)^{3/2}\big]_{t=0}^{t=1} \qquad (4)\\
&= \frac{13}{12}.
\end{aligned}
$$

Da (2), (3) e (4) segue infine

$$
I = \frac{1}{2} + \frac{13}{12} = \frac{19}{12}.
$$

3. Studiare le proprietà di convergenza della successione di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$, con

$$f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{n \sin x + x}{nx + 1}.$$

Risoluzione.

- Osserviamo che

$$f_n(0) = 0, \text{ per ogni } n.$$

Inoltre

$$f_n(x) = \frac{\sin x + x/n}{x + 1/n}, \text{ per ogni } n, x$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ per ogni } x > 0.$$

Quindi l'insieme di convergenza puntuale di $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ è $[0, +\infty)$ e la funzione limite $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \sin x/x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- Osserviamo che la funzione f è discontinua in 0, in quanto

$$\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} \sin x/x = 1 \neq 0 = f(0).$$

Quindi $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ non converge uniformemente in $[0, +\infty)$.

- Per ogni $x > 0$ si ha

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= \frac{\sin x + x/n}{x + 1/n} - \frac{\sin x}{x} \\ &= \frac{x \sin x + x^2/n - x \sin x - \sin x/n}{x(x + 1/n)} \\ &= \frac{x^2 - \sin x}{nx^2 + x}, \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{x^2 + 1}{nx^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{nx^2}. \tag{5}$$

- Fissiamo ora $a > 0$. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{n}, \text{ per ogni } n,$$

si ha
$$\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C_b([a, +\infty)).$$
Inoltre da (5) segue che
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{na^2}, \text{ per ogni } x \in [a, +\infty)$$
e quindi
$$\|f_n - f\|_{\infty,[a,+\infty)} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{na^2}.$$
Questo prova che $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ converge in $(C_b([a, +\infty)), \|\cdot\|_{\infty,[a,+\infty)})$ e dunque anche uniformemente in $[a, +\infty)$.