Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2023/2024

5 settembre 2024 - III appello

$* * *$

Risoluzione degli esercizi

1. Sia S la superficie costituita dai punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}\,x, \quad z = 2xy.$$

Rappresentare graficamente la proiezione di S nel piano xy e calcolare

$$\int_S \frac{z}{(1+4x^2+4y^2)^{1/2}}\, dH^2(x,y,z).$$

Risoluzione. Posto $C := \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \times [0,1]$, una parametrizzazione $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ di S è data da $((\theta,\rho) \in C)$

$$\begin{aligned}\varphi(\theta,\rho) :&= (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 2\rho^2\cos\theta\sin\theta)\\ &= (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho^2\sin 2\theta).\end{aligned}$$

Come si verifica facilmente, si ha

$$D_1\varphi(\theta,\rho) \times D_2\varphi(\theta,\rho) = (2\rho^2\sin\theta, 2\rho^2\cos\theta, -\rho)$$

e quindi il fattore di trasformazione di φ è

$$J\varphi(\theta,\rho) = \|D_1\varphi(\theta,\rho) \times D_2\varphi(\theta,\rho)\| = \rho\,(1+4\rho^2)^{1/2}.$$

Allora, per la formula dell'area e per il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{S=\varphi(C)} \frac{z}{(1+4x^2+4y^2)^{1/2}}\, dH^2 &= \int_C \frac{\rho^2\sin 2\theta}{(1+4\rho^2)^{1/2}}\,\rho\,(1+4\rho^2)^{1/2} dL^2\\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(\int_0^1 \rho^3\sin 2\theta\, d\rho\right) d\theta\\ &= \left(\int_{\pi/6}^{\pi/3}\sin 2\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^3\, d\rho\right)\\ &= \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

2. Sia
$$E := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le x^2 - y^2 \le 4, \ \ -\frac{1}{\sqrt{3}} \le \frac{y}{x} \le \frac{1}{\sqrt{3}}, \ \ x > 0 \right\}$$
e
$$F := E \times [0,1].$$
Rappresentare graficamente E. Inoltre, usare il teorema della divergenza di Gauss per calcolare
$$\int_{\partial F} \left(y, x, \frac{z}{x^2+y^2} \right) \cdot N \, dH^2,$$
dove N è il campo normale esterno a ∂E.

Risoluzione. Dal teorema della divergenza di Gauss otteniamo
$$I := \int_{\partial F} \left(y, x, \frac{z}{x^2+y^2} \right) \cdot N \, dH^2 = \int_F \frac{1}{x^2+y^2} \, dL^3.$$
Quindi, per il teorema di Fubini
$$I = \int_0^1 \left(\int_E \frac{1}{x^2+y^2} \, dL^2(x,y) \right) dz = \int_E \frac{1}{x^2+y^2} \, dL^2. \tag{1}$$
È naturale considerare il seguente cambio di variabili
$$\begin{cases} s = x^2 - y^2 \\ t = y/x \end{cases}$$
con $(s,t) \in R := [1,4] \times [-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$. Tale sistema si può invertire con semplici calcoli e si ottiene
$$\begin{cases} x = \left(\frac{s}{1-t^2}\right)^{1/2} \\ y = t\left(\frac{s}{1-t^2}\right)^{1/2}. \end{cases}$$
Questo porta a introdurre la seguente $(2,2)$-parametrizzazione regolare di E
$$\varphi : R \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(s,t) := \left(\left(\frac{s}{1-t^2}\right)^{1/2}, t\left(\frac{s}{1-t^2}\right)^{1/2} \right)$$
il cui fattore di trasformazione si trova facilmente essere
$$J\varphi(s,t) = |\det D\varphi(s,t)| = \frac{1}{2(1-t^2)}.$$

Richiamando ora (1), la formula dell'area e il teorema di Fubini, otteniamo allora

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{E=\varphi(R)} \frac{1}{x^2+y^2}\, dL^2 = \int_R \frac{1}{\frac{s}{1-t^2}+\frac{t^2 s}{1-t^2}} \cdot \frac{1}{2(1-t^2)}\, dL^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_R \frac{1}{s(1+t^2)}\, dL^2 = \frac{1}{2}\int_1^4 \left(\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{s(1+t^2)}\, dt\right) ds \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\, dt\right)\left(\int_1^4 \frac{1}{s}\, ds\right) = \arctan(1/\sqrt{3}) \ln 4
\end{aligned}
$$

e cioè

$$
I = \frac{\pi}{3} \ln 2.
$$

3. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2-1)^{2n}.$$

Risoluzione. Prima di tutto, osserviamo che la serie assegnata è la composizione della serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} y^n$ con la funzione $(x^2-1)^2$. Ricordiamo che la serie geometrica converge in $(-1,1)$ e che la sua somma vale $\frac{1}{1-y}$ (per ogni $y \in (-1,1)$).

- Convergenza puntuale. Si ha $(x^2-1)^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e

$$(x^2-1)^2 < 1 \text{ se e solo se } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}.$$

Quindi la serie da studiare ha come insieme di convergenza puntuale $D := (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$ e la sua somma $S : D \to \mathbb{R}$ è data da (per ogni $x \in D$)

$$S(x) := \frac{1}{1-(x^2-1)^2}.$$

- Convergenza uniforme. Posto $S_N(x) := \sum_{n=0}^{N}(x^2-1)^{2n}$, per ogni $x \in D$, si ha

$$|S(x) - S_N(x)| = S(x) - S_N(x) = \frac{(x^2-1)^{2(N+1)}}{1-(x^2-1)^2}.$$

A questo punto possiamo facilmente descrivere la convergenza uniforme:

  – Per ogni $N \geq 0$, si ha

$$\begin{aligned}\sup_{x\in D}|S(x) - S_N(x)| &= \sup_{x\in D}\frac{(x^2-1)^{2(N+1)}}{1-(x^2-1)^2}\\ &\geq \lim_{x\to\sqrt{2}-}\frac{(x^2-1)^{2(N+1)}}{1-(x^2-1)^2} = +\infty.\end{aligned}$$

  Quindi la serie non converge uniformemente in D. Lo stesso argomento prova che se $E \subset D$ ha come punto di accumulazione (almeno) uno dei tre punti $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ e 0, allora la serie non converge uniformemente in E.

  – Scelti arbitrariamente $a, b > 0$ tali che $0 < a < b < \sqrt{2}$, la serie assegnata converge uniformemente nell'insieme

$$E := [-b, -a] \cup [a, b].$$

  Ciò può essere verificato come segue. Consideriamo la funzione pari $R_N : D \to [0, +\infty)$ definita da

$$R_N(x) := S(x) - S_N(x) = \frac{(x^2-1)^{2(N+1)}}{1-(x^2-1)^2} \qquad (x \in D)$$

e osserviamo che

$$\lim_{x\to 0+} R_N(x) = \lim_{x\to\sqrt{2}-} R_N(x) = +\infty, \quad R_N(1) = 0. \tag{2}$$

Inoltre si vede subito che R_N è di classe C^1 e con un calcolo facile si trova

$$R'_N(x) = \frac{4Nx(x^2-1)^{2N+1}[1-(x^2-1)^2+1/N]}{[1-(x^2-1)^2]^2},$$

per cui R'_N si annulla soltanto nei punti ± 1. Quindi R_N è decrescente in $(0,1)$ ed è crescente in $(1,\sqrt{2})$. Da questo, da (2) e ricordando che R_N è pari, segue subito che

$$\begin{aligned}\sup_{x\in E} |S(x) - S_N(x)| = \sup_{x\in[a,b]} R_N(x) &\le R_N(a) + R_N(b) \\ &= S(a) - S_N(a) + S(b) - S_N(b)\end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{x\in E} |S(x) - S_N(x)| = 0.$$