Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2023/2024

13 gennaio 2025 - IV appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Sia P il parallelogramma racchiuso dalla poligonale congiungente i punti

$$(0,2,0); \quad (0,3,0); \quad (0,2,1); \quad (0,1,1).$$

Rappresentare graficamente il solido E ottenuto dalla rotazione completa di P intorno all'asse z e calcolare

$$\int_E \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2+y^2}}\, dL^3.$$

Risoluzione. Poniamo

$$I := \int_E \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2+y^2}}\, dL^3.$$

Per il Teorema di Fubini (sezioni piane orizzontali) e osservando che E_z è vuoto se $z \notin [0,1]$, si trova

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{E_z} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2+y^2}}\, dL^2(x,y) \right) dL^1(z) \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_{E_z} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2+y^2}}\, dL^2(x,y) \right) dL^1(z). \end{aligned} \tag{1}$$

Se $z \in [0,1]$, la sezione E_z è la corona circolare centrata in $(0,0)$ di raggi $2-z$ e $3-z$ se $z \in [0,1]$ che è parametrizzata dal cambio di variabili (da cartesiane a polari)

$$\varphi : C_z := [2-z, 3-z] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\rho,\theta) := (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

Quindi, applicando la formula dell'area (ricordando che $J\varphi(\rho,\theta) = \rho$), il Teorema di Fubini, la compatibilità degli integrali di Riemann e Lebesgue e il Teorema fondamentale del calcolo, si ottiene ($z \in [0,1]$)

$$\begin{aligned}
\int_{E_z=\varphi(C_z)} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2+y^2}}\, dL^2(x,y) &= \int_{C_z} \frac{\sin\rho}{2\rho}\,\rho\, dL^2(\rho,\theta) \\
&= \int_{[0,2\pi]} \left(\int_{[2-z,3-z]} \frac{\sin\rho}{2}\, dL^1(\rho) \right) dL^1(\theta) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_{2-z}^{3-z} \frac{\sin\rho}{2}\, d\rho \right) d\theta \\
&= \pi \int_{2-z}^{3-z} \sin\rho\, d\rho \\
&= \pi[\cos(2-z) - \cos(3-z)].
\end{aligned}$$

Da questa, da (1) (richiamando anche la linearità dell'integrale e la compatibilità degli integrali di Riemann e Lebesgue) e dal Teorema fondamentale del calcolo segue che

$$I = \pi \int_0^1 [\cos(2-z) - \cos(3-z)]\, dz = \pi[\sin(2-z) - \sin(3-z)]_{z=1}^{z=0}$$

e cioè

$$I = \pi(2\sin 2 - \sin 3 - \sin 1).$$

2. Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ il cilindro di equazione $y = x^2$ e sia $P \subset \mathbb{R}^3$ il grafico della funzione

$$D \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

dove $D \subset \mathbb{R}^2$ è il disco di raggio $\sqrt{2}$ centrato nell'origine. Fornire una rappresentazione grafica qualitativa di $C \cap P$ e calcolare l'integrale

$$\int_{C\cap P} x(1 - 2y + 6z)\, dH^1.$$

Risoluzione. Poniamo per semplicità $\Gamma := C \cap P$ e

$$I := \int_\Gamma x(1 - 2y + 6z)\, dH^1.$$

Osserviamo che l'intersezione di C e del disco $D \times \{0\}$ è l'arco di parabola

$$\{(x, x^2, 0) \mid x \in [-1, 1].\}$$

Quindi una $(1, 3)$-parametrizzazione regolare di Γ è data da

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (t, t^2, t^2 + t^4).$$

Calcoliamo il fattore di trasformazione di γ:

$$|\gamma'(t)| = |(1, 2t, 2t + 4t^3)| = (1 + 8t^2 + 16t^4 + 16t^6)^{1/2}, \quad t \in (-1, 1).$$

Allora, per la formula dell'area, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma=\gamma([-1,1])} x(1 - 2y + 6z)\, dH^1 \\ &= \int_{-1}^{1} t(1 - 2t^2 + 6t^2 + 6t^4)(1 + 8t^2 + 16t^4 + 16t^6)^{1/2}\, dt. \end{aligned}$$

Poiché l'integrando è una funzione dispari e il dominio di integrazione è un intervallo simmetrico (rispetto allo zero), si conclude che $I = 0$.

3. Si consideri la successione di funzioni $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, definite come segue

$$f_n(x) := x^n \max\{n + 1 - x, 0\}.$$

- Tracciare un grafico qualitativo di f_n;
- Descrivere le proprietà di convergenza puntuale e uniforme di $\{f_n\}$.

Risoluzione. Un grafico qualitativo di f_n si ottiene facilmente dalle seguenti proprietà:

(1) $f_n \geq 0$, $f_n(0) = 0$ e f_n è continua.

(2) Per ogni $x \geq n + 1$, si ha $f_n(x) = 0$.

(3) Per ogni $x \in [0, n + 1]$, si ha

$$f_n(x) = x^n (n + 1 - x)$$

e quindi

$$f_n'(x) = (n + 1)(n - x)x^{n-1}.$$

Pertanto f_n è crescente in $[0, n]$ e decrescente in $[n, n+1]$. Il valore massimo di f_n viene dunque conseguito in n e si ha

$$f_n(n) = n^n.$$

(4) $f_n'(0) = 0$ (per ogni $n \geq 2$) e la derivata sinistra di f_n in $n + 1$ vale $-(n + 1)^n$.

Per quanto riguarda le proprietà di convergenza, osserviamo prima di tutto che, per (2) e (3), si ha:

(5) $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} nx^n = \lim_{n\to+\infty} \left(n^{1/n}x\right)^n = 0$, per ogni $x \in [0, 1)$;

(6) $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n (n + 1 - x) = +\infty$, per ogni $x \in [1, +\infty)$.

Quindi:

(7) l'insieme di convergenza e la funzione limite puntuale (di $\{f_n\}$) sono, rispettivamente, $D := [0, 1)$ e

$$f : D = [0, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

Rimane da studiare la convergenza uniforme di $\{f_n\}$:

(8) La successione non converge uniformemente in $D = [0, 1)$. Infatti, essendo f_n crescente e continua $[0, n]$, si ha

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1)} f_n(x) = f_n(1) = n$$

e quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = +\infty.$$

(9) Se $a \in (0, 1)$, allora la successione converge uniformemente in $[0, a]$. Infatti, procedendo come in (8), otteniamo

$$\sup_{x \in [0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,a]} f_n(x) = f_n(a),$$

da cui, essendo $a \in D$, si ottiene

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \to +\infty} f_n(a) = f(a) = 0.$$