Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2023/2024

3 febbraio 2025 - V appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Sia E il sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$ delimitato dalle curve

$$y^2 - x^2 = -1, \quad y^2 - x^2 = 1, \quad x + y = 1, \quad x + y = 2.$$

Inoltre sia S il grafico della funzione

$$f : E \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x + y.$$

- Fornire una rappresentazione grafica di E.
- Calcolare $H^2(S)$.

Risoluzione. Per la compatibilità misura-integrale e per la formula dell'area, si ha

$$H^2(S) = \int_S 1\, dH^2 = \int_E (1 + |\nabla f|^2)^{1/2} dL^2 = \sqrt{3}\, L^2(E). \tag{1}$$

Per calcolare $L^2(E)$ osserviamo prima di tutto che ogni punto di E è intersezione di una retta di equazione $x+y = s$ e di un'iperbole di equazione $y^2 - x^2 = t$, con $(s,t) \in C := [1,2] \times [-1,1]$. Invertendo (ossia risolvendo!) il sistema formato da queste due equazioni e cioè

$$\begin{cases} x + y = s \\ y^2 - x^2 = t \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{s^2-t}{2s} \\ y = \frac{s^2+t}{2s}. \end{cases}$$

Quindi la mappa

$$\varphi : C \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(s,t) := \left(\frac{s^2 - t}{2s}, \frac{s^2 + t}{2s} \right)$$

è una $(2,2)$-parametrizzazione regolare di E e si trova facilmente che

$$J\varphi(s,t) = |\det D\varphi(s,t)| = \frac{1}{2s},$$

per ogni $(s,t) \in (1,2) \times (-1,1)$. Quindi, dalla compatibilità misura-integrale, dalla formula dell'area, dal teorema di Fubini e dalla compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann, segue che

$$\begin{aligned} L^2(E) = H^2(E) &= \int_{E=\varphi(C)} 1\, dH^2 \\ &= \int_C J\varphi\, dL^2 = \frac{1}{2}\int_C \frac{1}{s}\, dL^2(s,t) \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{s}\, dt\right) ds = \int_1^2 \frac{1}{s}\, ds \end{aligned}$$

e cioè

$$L^2(E) = \ln 2.$$

Da questa e da (1) segue finalmente che

$$H^2(S) = \sqrt{3}\, \ln 2.$$

2. Si considerino l'insieme

$$E := \{(x,y) \in [-2,2] \times [0,1] \,:\, y \geq 1 - |x|\}$$

e il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) := \big(2xy, x^2 + \sin x + y\big)\,.$$

- Rappresentare graficamente E;
- Usare la formula di Green per calcolare

$$\int_{\partial E} F \cdot \tau_E \, dH^1,$$

dove τ_E indica l'orientazione positiva di ∂E.

Risoluzione. Per la formula di Green, si ha

$$I := \int_{\partial E} F \cdot \tau_E \, dH^1 = \int_E D_1(x^2 + \sin x + y) - D_2(2xy)\, dL^2 = \int_E \cos x \, dL^2.$$

Quindi, per il teorema di Fubini (sezioni orizzontali),

$$I = \int_{[0,1]} \left(\int_{E_y} \cos x \, dL^1(x) \right) dL^1(y) \tag{2}$$

Osserviamo che, per ogni $y \in [0,1]$, si ha

$$E_y = [-2, y-1] \cup [1-y, 2].$$

Pertanto, ricordando la compatibilità fra gli integrali di Riemann e di Lebesgue (nonché il teorema fondamentale del calcolo), si trova che

$$\begin{aligned} \int_{E_y} \cos x \, dL^1(x) &= \int_{-2}^{y-1} \cos x \, dx + \int_{1-y}^{2} \cos x \, dx \\ &= \sin(y-1) + \sin 2 + \sin 2 - \sin(1-y) \\ &= 2\sin(y-1) + 2\sin 2 \end{aligned} \tag{3}$$

per ogni $y \in [0,1]$. Sostituendo (3) in (2) e ricordando nuovamente la compatibilità fra gli integrali di Riemann e di Lebesgue (e il teorema fondamentale del calcolo), si trova

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0,1]} \big(2\sin(y-1) + 2\sin 2\big)\, dL^1(y) \\ &= \int_0^1 2\sin(y-1)\, dy + 2\sin 2 \\ &= 2[\cos(y-1)]_{y=1}^{y=0} + 2\sin 2 \\ &= 2\cos 1 - 2 + 2\sin 2. \end{aligned}$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica e pari tale che

$$f(x) = \max\left\{\min\left\{x, \frac{\pi}{2} - x\right\}, x - \frac{\pi}{2}\right\}, \text{ per ogni } x \in [0, \pi].$$

- Fornire una rappresentazione del grafico di f.
- Calcolare i coefficienti di Fourier a_0, a_1, a_4 e b_n.
- Descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di f.

Risoluzione. Ricordiamo che, essendo f pari, si ha $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$ e

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \text{ per ogni } n \geq 0.$$

In particolare

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] = \frac{3\pi}{8}.$$

Per ogni $n \geq 1$, invece, usando la formula di integrazione per parti e il teorema fondamentale del calcolo, si trova

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/4} t\cos(nt)\,dt + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cos(nt)\,dt\right. \\
&\quad \left. + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(nt)\,dt\right] \\
&= \frac{2}{\pi n}\left[\int_0^{\pi/4} tD(\sin(nt))\,dt + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)D(\sin(nt))\,dt\right. \\
&\quad \left. + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)D(\sin(nt))\,dt\right] \\
&= \frac{2}{\pi n}\left[[t\sin(nt)]_{t=0}^{t=\pi/4} - \int_0^{\pi/4}\sin(nt)\,dt\right. \\
&\quad + [(\pi/2 - t)\sin(nt)]_{t=\pi/4}^{t=\pi/2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin(nt)\,dt \\
&\quad \left. + [(t - \pi/2)\sin(nt)]_{t=\pi/2}^{t=\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi}\sin(nt)\,dt\right] \\
&= \frac{2}{\pi n}\left[\frac{\pi}{4}\sin(n\pi/4) + \frac{\cos(n\pi/4)}{n} - \frac{1}{n}\right. \\
&\quad - \frac{\pi}{4}\sin(n\pi/4) + \frac{\cos(n\pi/4)}{n} - \frac{\cos(n\pi/2)}{n} \\
&\quad \left. + \frac{(-1)^n}{n} - \frac{\cos(n\pi/2)}{n}\right] \\
&= \frac{2}{\pi n^2}[2\cos(n\pi/4) - 2\cos(n\pi/2) - 1 + (-1)^n].
\end{aligned}$$

Quindi
$$a_1 = \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{2}-2\right), \quad a_4 = \frac{1}{8\pi}\left(-2-2-1+1\right) = -\frac{1}{2\pi}.$$
Quanto alle proprietà di convergenza, possiamo affermare che la serie di Fourier di f converge uniformemente a f in quanto f è regolare a tratti e continua.