Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2023/2024

10 giugno 2024 - I appello

$* * *$

Risoluzione degli esercizi

1. Sia B la palla di raggio 1 e centro $(0, 2, 1)$. Sia E la regione di $\mathbb{R}^3$ ottenuta da una rotazione completa dell'insieme

$$T := (\{0\} \times [1, 2] \times [0, 1]) \setminus B,$$

intorno all'asse z.

- Rappresentare graficamente T ed E;
- Calcolare l'integrale

$$\int_E z \left(\frac{2}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - 1 \right) dL^3.$$

Risoluzione. Dal teorema di Fubini (piani orizzontali) otteniamo

$$\begin{aligned} I := &\int_E z \left(\frac{2}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - 1 \right) dL^3 \\ = &\int_{\mathbb{R}} z \left[\int_{E_z} \left(\frac{2}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - 1 \right) dL^2(x, y) \right] dL^1(z). \end{aligned}$$

Osserviamo che:

- $E_z = \emptyset$ per ogni $z \notin [0, 1]$;
- Se $z \in [0, 1]$, allora $E_z \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ è la corona circolare di raggio minore 1 e raggio maggiore
$$r_z = 2 - (2z - z^2)^{1/2}.$$

Quindi

$$I = \int_{[0,1]} z \left[\int_{E_z} \left(\frac{2}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - 1 \right) dL^2(x, y) \right] dL^1(z) \tag{1}$$

e, usando la formula dell'area col cambio di variabili da cartesiane a polari, il teorema di Fubini e il teorema fondamentale del calcolo,

$$\begin{aligned}\int_{E_z}\left(\frac{2}{(x^2+y^2)^{1/2}}-1\right)dL^2(x,y)&=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^{r_z}\left(\frac{2}{\rho}-1\right)\rho\,d\rho\right)d\theta\\&=2\pi\int_1^{r_z}(2-\rho)\,d\rho\\&=-\pi\big[(2-\rho)^2\big]_{\rho=1}^{\rho=r_z}\\&=\pi(z^2-2z+1).\end{aligned}$$

Da questa, da (1) e di nuovo dal teorema fondamentale del calcolo, otteniamo

$$I=\pi\int_0^1(z^3-2z^2+z)\,dz=\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{12}.$$

2. Sia S il triangolo avente come vertici l'origine, (1,0,1) e (1,1,2). Inoltre sia N il campo normale ascendente a S e si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := (xz, x^2 + y, x - yz).$$

- Rappresentare graficamente S;
- Usare il teorema di Stokes per calcolare $\int_{\partial(S,N)} F$.

Risoluzione. Posto $A := (1, 0, 1)$ e $B := (1, 1, 2)$, l'equazione del piano passante per O, A, B è

$$(x, y, z) \cdot (A \times B) = 0$$

i.e.

$$z - x - y = 0.$$

Quindi S è il grafico della funzione

$$f : T \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x + y$$

dove $T \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ è il triangolo di vertici $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$. Otteniamo così la parametrizzazione cartesiana di S

$$\varphi : T \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y) := (x, y, f(x, y)) = (x, y, x + y).$$

Osserviamo che $((x, y) \in T)$

$$J\varphi(x, y) = (1 + \|\nabla f(x, y)\|^2)^{1/2} = 3^{1/2} \tag{2}$$

e

$$\nu_\varphi(x, y) = 3^{-1/2}(-D_1 f(x, y), -D_2 f(x, y), 1) = 3^{-1/2}(-1, -1, 1). \tag{3}$$

In particolare, dato che la terza componente di ν_φ è positiva, si ha

$$\nu_\varphi = N \circ \varphi. \tag{4}$$

Infine, si trova facilmente $((x, y) \in \mathbb{R}^3)$

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = (-z, x - 1, 2x). \tag{5}$$

Dalla formula di Stokes, dalla formula dell'area e da (5), (4), (3), (2), si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\partial(S,N)} F = \int_{(S,N)} \operatorname{rot} F &= \int_{S=\varphi(T)} (\operatorname{rot} F) \cdot N \, dH^2 \\ &= \int_T [(\operatorname{rot} F) \circ \varphi] \cdot (N \circ \varphi) \, J\varphi \, dL^2 \\ &= \int_T (-x - y, x - 1, 2x) \cdot [3^{-1/2}(-1, -1, 1)] 3^{1/2} dL^2 \\ &= \int_T (2x + y + 1) \, dL^2.\end{aligned}$$

Pertanto, dal teorema di Fubini

$$\int_{\partial(S,N)} F = \int_0^1 \left(\int_0^x (2x + y + 1) \, dy \right) dx = \int_0^1 (2x^2 + x^2/2 + x) \, dx = 4/3.$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione dispari e 2π-periodica tale che

$$f(x) = \pi - (\pi^2 - x^2)^{1/2}, \text{ per ogni } x \in (0, \pi).$$

- Tracciare il grafico qualitativo di f;
- Descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di f;
- Calcolare a_n ($n \geq 0$) e provare con un calcolo diretto che $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Risoluzione.

- Il grafico di f si traccia facilmente una volta osservato che:
  (i) Poiché f è dispari e 2π-periodica, si ha
  $$f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0.$$
  (ii) Il grafico di $f|_{(0,\pi)}$ coincide con l'arco di circonferenza
  $$\{(0, \pi) + \pi(\cos t, \sin t) \,|\, t \in (-\pi/2, 0)\}.$$
- La funzione f è derivabile in $(-\pi, \pi)$ ma f' non è limitata in $(-\pi, \pi)$. Infatti si ha, in particolare,
  $$f'(x) = \frac{x}{(\pi^2 - x^2)^{1/2}}, \text{ per ogni } x \in (0, \pi) \tag{6}$$
  e quindi $\lim_{x\to\pi-} f'(x) = +\infty$. Pertanto f non è regolare a tratti e non si può applicare la teoria RAT della serie di Fourier.
- Poiché f è banalmente continua e limitata in $(-\pi, \pi)$, si ha $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Dalla teoria L^2 della serie di Fourier segue allora che:
  (i) La serie di Fourier di f converge incondizionatamente a f in $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$.
  (ii) La serie di Fourier di f converge puntualmente quasi ovunque a f in $(-\pi, \pi)$.
- Dato che f è dispari, si ha $a_n = 0$ per ogni $n \geq 0$.
- Ricordando che
  $$f(0) = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0+} f(\pi - \varepsilon) = \pi$$
  e usando la formula di integrazione per parti, otteniamo (per ogni $n \geq 1$)
  $$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi-\varepsilon} f(t)\sin(nt)\,dt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{2}{n\pi}\left[-f(t)\cos(nt)\right]_0^{\pi-\varepsilon} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi-\varepsilon} f'(t)\cos(nt)\,dt\right) \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,dt. \end{aligned}$$

Osserviamo che il passaggio a $f|_{[0,1-\varepsilon]}$ è stato necessario perché $f|_{[0,1]}$ non è continua in 1.

Allora, poiché per ogni $x \in (0,\pi)$ si ha $f'(x) > 0$ (per (6)) e usando anche il teorema fondamentale del calcolo, si ottiene

$$\begin{aligned}
|b_n| &\leq \left|\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\right| + \left|\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi f'(t)\cos(nt)\,dt\right| \\
&\leq \frac{2}{n} + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi |f'(t)\cos(nt)|\,dt \\
&= \frac{2}{n} + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi f'(t)|\cos(nt)|\,dt \\
&\leq \frac{2}{n} + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi f'(t)\,dt \\
&= \frac{2}{n} + \frac{2}{n\pi}\lim_{\varepsilon\to0+}\int_0^{\pi-\varepsilon} f'(t)\,dt \\
&= \frac{2}{n} + \frac{2}{n\pi}\lim_{\varepsilon\to0+} f(\pi-\varepsilon) = \frac{4}{n}.
\end{aligned}$$

Da questa segue subito che $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.