Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2023/2024

1 luglio 2024 - II appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Rappresentare graficamente l'insieme

$$E := \{\rho(\cos\theta, \sin\theta) \,|\, 0 \le \theta \le \pi,\, \theta/2 \le \rho \le \theta^2 + \theta/2\}.$$

Usare poi il Teorema di Green per calcolare

$$\int_{(\partial E, \tau_E)} (-y, x),$$

dove τ_E indica il campo vettoriale unitario che orienta positivamente ∂E.

Risoluzione. Per il Teorema di Green si ha

$$\begin{aligned}\int_{(\partial E,\tau_E)} (-y,x) &= \int_{\partial E} (-y,x)\cdot \tau_E(x,y)\, dH^1 \\ &= \int_E [D_1 x - D_2(-y)]\, dL^2(x,y) = \int_E 2\, dL^2.\end{aligned} \tag{1}$$

Se

$$A := \{(\theta,\rho) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < \theta < \pi,\, \theta/2 < \rho < \theta^2 + \theta/2\},$$

la mappa

$$\varphi : \overline{A} \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\theta,\rho) := (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

è una $(2,2)$-parametrizzazione regolare di E e si ha

$$J\varphi(\theta,\rho) = \rho, \text{ per ogni } (\theta,\rho) \in A.$$

Quindi, dalla formula dell'area, si ottiene

$$\int_{E=\varphi(\overline{A})} 2\, dL^2 = \int_A 2\rho\, dL^2(\theta,\rho). \tag{2}$$

Infine, da (1), da (2), dal teorema di Fubini (sezioni verticali) e dal teorema fondamentale del calcolo, segue che

$$\begin{aligned}\int_{(\partial E,\tau_E)} (-y,x) &= \int_0^\pi \left(\int_{\theta/2}^{\theta^2+\theta/2} 2\rho\, d\rho\right) d\theta = \int_0^\pi \left(\rho^2\right)_{\theta/2}^{\theta^2+\theta/2} d\theta \\ &= \int_0^\pi (\theta^4 + \theta^3)\, d\theta = \frac{\pi^5}{5} + \frac{\pi^4}{4}.\end{aligned}$$

2. Sia E la curva del piano di equazione $x^2 + 4y^2 = 4$ e sia G il grafico della funzione

$$f : E \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \frac{x}{2} + 2y,$$

i.e., $G = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in E\}$. Calcolare l'integrale

$$\int_G (5 - 2xy)^{1/2} dH^1(x, y, z).$$

Risoluzione. L'equazione di E si può riscrivere come segue

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

e quindi E è l'ellisse centrata nell'origine con semiasse orizzontale 2 e semiasse verticale 1. Allora $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) := (2\cos t, \sin t, f(2\cos t, \sin t)) = (2\cos t, \sin t, \cos t + 2\sin t)$$

è una $(1, 3)$-parametrizzazione regolare di G. Osserviamo che ($t \in [0, 2\pi]$)

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, \cos t, 2\cos t - \sin t)$$

da cui

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= (4\sin^2 t + \cos^2 t + 4\cos^2 t + \sin^2 t - 4\cos t \sin t)^{1/2} \\ &= (5 - 4\cos t \sin t)^{1/2} \end{aligned}$$

Per la formula dell'area e il teorema fondamentale del calcolo,

$$\begin{aligned} &\int_{G=\gamma([0,2\pi])} (5 - 2xy)^{1/2} dH^1(x, y, z) \\ &\qquad = \int_0^{2\pi} [5 - 2(2\cos t)\sin t]^{1/2} (5 - 4\cos t \sin t)^{1/2} dt \\ &\qquad = \int_0^{2\pi} (5 - 4\cos t \sin t)\, dt = 10\pi. \end{aligned}$$

3. Si consideri la successione di funzioni $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, definite come segue

$$f_n(x) := \frac{6x^3 + 6nx^2 - 3(n+1)x + 2}{nx^3}.$$

- Tracciare un grafico qualitativo di f_n;
- Descrivere le proprietà di convergenza puntuale e uniforme di $\{f_n\}$.

Risoluzione.

- *Grafico qualitativo di* f_n. Dalla definizione di f_n si vede subito che

$$\lim_{x \to 0+} f_n(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \frac{6}{n}$$

cioè il semiasse positivo delle ordinate e la semiretta $(0, +\infty) \times \{6/n\}$ sono asintoti del grafico di f_n. Inoltre

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{nx^3(18x^2 + 12nx - 3(n+1)) - 3nx^2(6x^3 + 6nx^2 - 3(n+1)x + 2)}{n^2x^6} \\ &= \frac{-6(nx^2 - (n+1)x + 1)}{nx^4} \end{aligned}$$

e quindi

(i) $f_n'(1/n) = f_n'(1) = 0$;
(ii) $f_n' < 0$ in $(0, 1/n) \cup (1, +\infty)$;
(iii) $f_n' > 0$ in $(1/n, 1)$.

In particolare f_n assume il suo valore minimo assoluto in $1/n$, ha un massimo locale in 1 e vale

$$f_n(1/n) = \frac{6}{n} + 3n - n^2, \quad f_n(1) = 3 + \frac{5}{n}.$$

- *Convergenza puntuale di* $\{f_n\}$. Poiché

$$f_n(x) = \frac{6}{n} + \frac{6}{x} - \frac{3(n+1)}{nx^2} + \frac{2}{nx^3}, \text{ per ogni } x \in (0, +\infty),$$

si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}, \text{ per ogni } x \in (0, +\infty).$$

Quindi l'insieme di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ è $D := (0, +\infty)$ e la funzione limite puntuale di $\{f_n\}$ è

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}.$$

- *Convergenza uniforme di* $\{f_n\}$. Si ha

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{6}{n} - \frac{3}{nx^2} + \frac{2}{nx^3} \right|.$$

Allora:

(i) Per ogni $n \geq 1$ si ha $\lim_{x \to 0+} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$ e quindi anche $\sup_{x \in (0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$. Pertanto $\{f_n\}$ non converge uniformemente in $(0, +\infty)$.

(ii) Per ogni $n \geq 1$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{6}{n} + \frac{3}{nx^2} + \frac{2}{nx^3}.$$

Quindi, per ogni $a \in (0, +\infty)$,

$$\sup_{x \in [a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in [a,+\infty)} \left(\frac{6}{n} + \frac{3}{nx^2} + \frac{2}{nx^3} \right) = \frac{6}{n} + \frac{3}{na^2} + \frac{2}{na^3}.$$

Se ne conclude che $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f|_{[a,+\infty)}$ in $[a, +\infty)$.