

Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2024/2025

10 giugno 2025 - I appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Sia

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2(x^2 + y^2)^{1/2} \leq z \leq 3 - x^2 - y^2 \right\}.$$

Fornire una rappresentazione grafica qualitativa di E e calcolare

$$\int_E |z - 2| dL^3.$$

Risoluzione. Poiché la superficie conica $z = 2(x^2 + y^2)^{1/2}$ e la superficie paraboloidale $z = 3 - x^2 - y^2$ sono entrambe superfici di rotazione intorno all'asse z , la loro intersezione è un cerchio C “orizzontale” (i.e. contenuto in un piano parallelo al piano xy) e centrato in un punto dell'asse z . Risolvendo il sistema delle equazioni $z = 2(x^2 + y^2)^{1/2}$ e $z = 3 - x^2 - y^2$ si trova subito che C è il cerchio orizzontale di raggio 1 centrato in $(0, 0, 2)$. Quindi E è l'unione del cono

$$\Gamma := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2(x^2 + y^2)^{1/2} \leq z \leq 2 \right\}$$

e della calotta paraboloidale

$$\Pi := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2 \right\}.$$

Pertanto:

- Per $z \in [0, 2]$ si ha $E_z = \Gamma_z$ e questa sezione coincide col disco centrato nell'origine del piano xy , di raggio $z/2$.
- Per $z \in (2, 3]$ si ha $E_z = \Pi_z$ e questa sezione coincide col disco centrato nell'origine del piano xy , di raggio $(3 - z)^{1/2}$.
- Per $z \notin [0, 3]$ si ha $E_z = \emptyset$.

Tenendo conto di tutto ciò, applicando il Teorema di Fubini (sezioni piane orizzontali), la compatibilità misura-integrale e la compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_E |z-2| dL^3 &= \int_{[0,3]} \left(\int_{E_z} |z-2| dL^2(x,y) \right) dL^1(z) \\
&= \int_{[0,2]} \left(\int_{E_z=\Gamma_z} |z-2| dL^2(x,y) \right) dL^1(z) \\
&\quad + \int_{[2,3]} \left(\int_{E_z=\Pi_z} |z-2| dL^2(x,y) \right) dL^1(z) \\
&= \int_{[0,2]} (2-z) \left(\int_{\Gamma_z} 1 dL^2(x,y) \right) dL^1(z) \\
&\quad + \int_{[2,3]} (z-2) \left(\int_{\Pi_z} 1 dL^2(x,y) \right) dL^1(z) \\
&= \int_0^2 (2-z) L^2(\Gamma_z) dz + \int_2^3 (z-2) L^2(\Pi_z) dz \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^2 (2-z) z^2 dz + \pi \int_2^3 (z-2)(3-z) dz.
\end{aligned}$$

Inoltre dal Teorema Fondamentale del Calcolo si ricava subito

$$\int_0^2 (2-z) z^2 dz = \frac{4}{3}, \quad \int_2^3 (z-2)(3-z) dz = \frac{1}{6}.$$

Quindi concludiamo

$$\int_E |z-2| dL^3 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

2. Si consideri la superficie

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 8, z \geq (x^2 + y^2)^{1/2} \right\}$$

e il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := (-y, x, z).$$

Inoltre sia $N = (N_1, N_2, N_3)$ il campo normale a S (continuo) tale che $N_3 > 0$.

- Dare una rappresentazione qualitativa di S ;
- Verificare il teorema di Stokes $\int_{(S,N)} \text{rot } F = \int_{\partial(S,N)} F$, calcolando separatamente i due membri dell'identità.

Risoluzione. L'intersezione fra la sfera Σ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ (di centro $(0, 0, 0)$ e raggio $2\sqrt{2}$) e il cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ è la circonferenza di raggio 2 centrata in $(0, 0, 2)$ e contenuta nel piano $z = 2$. Quindi S è la calotta di Σ che sta “sopra” il disco

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\},$$

e cioè

$$S = \Sigma \cap (D \times \mathbb{R}_+).$$

Calcoliamo separatamente i due membri dell'identità di Stokes:

- (i) E' molto facile calcolare che $\text{rot } F \equiv (0, 0, 2)$. Quindi, osservando che $N(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in S$, troviamo

$$\begin{aligned} \int_{(S,N)} \text{rot } F &= \int_S (\text{rot } F) \cdot N \, dH^2 = \int_S (0, 0, 2) \cdot N \, dH^2 \\ (1) \quad &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_S z \, dH^2. \end{aligned}$$

Per concludere il calcolo del primo membro dell'identità di Stokes, consideriamo la seguente $(2, 3)$ -parametrizzazione regolare di S

$$\varphi : C := [0, 2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, (8 - \rho^2)^{1/2}).$$

Dal consueto calcolo otteniamo $((\rho, \theta) \in (0, 2) \times (0, 2\pi))$

$$D_1 \varphi(\rho, \theta) \times D_2 \varphi(\rho, \theta) = (\rho^2(8 - \rho^2)^{-1/2} \cos \theta, \rho^2(8 - \rho^2)^{-1/2} \sin \theta, \rho)$$

e quindi

$$J\varphi(\rho, \theta) = \|D_1 \varphi(\rho, \theta) \times D_2 \varphi(\rho, \theta)\| = 2\sqrt{2}(8 - \rho^2)^{-1/2} \rho.$$

Ora, per (1), la formula dell'area e il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{(S,N)} \operatorname{rot} F &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{S=\varphi(C)} z dH^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_C (8 - \rho^2)^{1/2} 2\sqrt{2}(8 - \rho^2)^{-1/2} \rho dL^2 \\ &= 2 \int_C \rho dL^2 = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \rho d\rho \right) d\theta.\end{aligned}$$

E quindi, dal teorema fondamentale del calcolo

$$\int_{(S,N)} \operatorname{rot} F = 8\pi.$$

(ii) Una $(1, 3)$ -parametrizzazione di $\partial(S, N)$ è data da

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2).$$

Quindi, per la formula dell'area,

$$\begin{aligned}\int_{\partial(S,N)} F &= \int_{[0,2\pi]} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{[0,2\pi]} (-2 \sin t, 2 \cos t, 2) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) dL^1 \\ &= 4 \int_{[0,2\pi]} 1 dL^1\end{aligned}$$

e cioè

$$\int_{\partial(S,N)} F = 8\pi.$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione pari e 2π -periodica tale che

$$f|_{[0, \pi/2)} = \sin|_{[0, \pi/2)}, \quad f|_{[\pi/2, \pi]} = \sin|_{[\pi/2, \pi]} - 1.$$

- Disegnare il grafico di f .
- Descrivere e motivare le proprietà di convergenza della serie di Fourier della funzione f . In particolare, fare un esempio di insieme in cui la serie di Fourier di f converge uniformemente a f .
- Calcolare a_0 , a_2 e b_n (per ogni $n \geq 1$).

Risoluzione.

- La funzione f è continua a tratti, con $D = \{\pm\pi/2\}$. Quindi si ha anche $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e pertanto si può applicare la teoria L^2 della serie di Fourier. Ne segue che la serie di Fourier di f converge incondizionatamente a f in $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$. Inoltre essa converge puntualmente quasi ovunque a f , per il teorema di Lusin-Carleson.
- In $[-\pi, \pi) \setminus D$ la funzione f è derivabile con derivata continua e limitata. Quindi f è regolare a tratti con $E = D \cup \{-\pi, 0\}$. In base alla “teoria regolare a tratti”, possiamo affermare che la serie di Fourier di f :
 - converge puntualmente a $f(x)$ in ogni $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);
 - converge a $1/2$ in $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
 - converge uniformemente a f in ogni intervallo in cui f è continua, per esempio in $[-\pi/4, \pi/4]$.
- Poiché f è pari, si ha $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$.
- Si ha (per il teorema fondamentale del calcolo)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi (\sin t - 1) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t dt - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} - 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}a_2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(2t) dt \\&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \cos(2t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi (\sin t - 1) \cos(2t) dt \\&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos(2t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi \cos(2t) dt \\&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (2 \cos^2 t - 1) \sin t dt \\&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{2}{3} \cos^3 t + \cos t \right)_0^\pi \\&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{3} - 1 \right) = -\frac{4}{3\pi}.\end{aligned}$$