Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2024/2025

15 luglio 2025 - II appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Rappresentare graficamente l'insieme

$$D := \{(y,z) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty) \,|\, (y-1)^2 + z^2 \leq 4\}$$

e calcolare il volume del solido E ottenuto dalla rotazione completa di $\{0\} \times D$ intorno all'asse z.

Risoluzione. Osserviamo che la circonferenza $(y-1)^2 + z^2 = 4$ (nel piano yz) interseca il semiasse positivo delle z nel punto $(0, \sqrt{3})$. Per descrivere la sezione E_z, che è non vuota se e solo se $0 \leq z \leq 2$, bisogna distinguere i due casi $z \in [0, \sqrt{3}]$ e $z \in (\sqrt{3}, 2]$:

- Se $z \in [0, \sqrt{3}]$, D_z è il segmento $[0, r(z)]$ con

  $$r(z) := 1 + (4 - z^2)^{1/2}.$$

  Quindi E_z è il disco (nel piano xy) centrato nell'origine di raggio $r(z)$.

- Se $z \in (\sqrt{3}, 2]$, D_z è il segmento $[a(z), b(z)]$ con

  $$a(z) := 1 - (4 - z^2)^{1/2}, \quad b(z) := 1 + (4 - z^2)^{1/2}.$$

  Quindi $E(z)$ è la corona circolare (nel piano xy) centrata nell'origine di raggi $a(z)$ e $b(z)$.

Pertanto:

- Se $z \in [0, \sqrt{3}]$, si ha

  $$L^2(E_z) = \pi r(z)^2 = \pi[5 - z^2 + 2(4 - z^2)^{1/2}].$$

- Se invece $z \in (\sqrt{3}, 2]$, si ha

  $$L^2(E_z) = \pi b(z)^2 - \pi a(z)^2 = 4\pi(4 - z^2)^{1/2}.$$

Dalla compatibilià misura-integrale, dal teorema di Fubini, dalla compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann e dal teorema fondamentale del calcolo, otteniamo allora

$$\begin{aligned} L^3(E) &= \int_E 1\,dL^3 = \int_{[0,2]} \left(\int_{E_z} 1\,dL^2(x,y) \right) dL^1(z) = \int_{[0,2]} L^2(E_z)\,dL^1(z) \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \pi[5 - z^2 + 2(4-z^2)^{1/2}]\,dz + \int_{\sqrt{3}}^2 4\pi(4-z^2)^{1/2}\,dz \\ &= 5\pi\sqrt{3} - \pi\sqrt{3} + 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (4-z^2)^{1/2}\,dz + 4\pi \int_{\sqrt{3}}^2 (4-z^2)^{1/2}\,dz. \end{aligned}$$

Inoltre, usando la formula per il cambiamento della variabile nell'integrale ($z = 2\sin t$) e di nuovo il teorema fondamentale del calcolo, troviamo

$$\int_0^{\sqrt{3}} (4-z^2)^{1/2}\,dz = 4\int_0^{\pi/3} \cos^2 t\,dt = 2\int_0^{\pi/3} [1+\cos(2t)]\,dt = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\int_{\sqrt{3}}^2 (4-z^2)^{1/2}\,dz = 4\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = 2\int_{\pi/3}^{\pi/2} [1+\cos(2t)]\,dt = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si conclude che

$$L^3(E) = 4\pi\sqrt{3} + 2\pi\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\pi\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\pi\sqrt{3} + \frac{8\pi^2}{3}.$$

2. Si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = (y,x).$$

Calcolare $\int_{(C,\tau)} F$ nei seguenti casi:

(i) Se (C,τ) è il grafico della funzione

$$f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = x^\alpha$$

con $\alpha \in (0,+\infty)$, orientato in modo che $(0,0)$ sia il suo punto iniziale.

(ii) Se (C,τ) è un arco di circonferenza centrata in $(1,0)$ avente $(0,0)$ come punto iniziale e $(1,1)$ come punto finale.

(iii) (Facoltativo, vale 2 punti supplementari) Se (C,τ) è una qualsiasi curva regolare orientata, avente $(0,0)$ come punto iniziale e $(1,1)$ come punto finale.

Risoluzione. (i) Possiamo considerare la $(1,2)$-parametrizzazione regolare cartesiana di (C,τ) e cioè

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, t^\alpha).$$

Osserviamo che

$$\gamma'(t) = (1, \alpha t^{\alpha-1})$$

per ogni $t \in (0,1)$. Dalla formula dell'area, dalla compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann e dal teorema fondamentale del calcolo, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{(C,\tau)} F &= \int_{C=\gamma([0,1])} F\cdot\tau\, dH^1 = \int_{[0,1]} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\, dL^1(t) \\ &= \int_0^1 (t^\alpha, t)\cdot(1,\alpha t^{\alpha-1})\, dt = \int_0^1 (1+\alpha)t^\alpha\, dt = \int_0^1 D(t^{\alpha+1})\, dt \\ &= 1.\end{aligned}$$

(ii) Fra i due archi di circonferenza che si possono considerare, scegliamo quello maggiore. Una sua $(1,2)$-parametrizzazione regolare è data da

$$\gamma(t) = (1,0) + (\cos t, \sin t) = (1+\cos t, \sin t), \quad t \in [-\pi, \pi/2].$$

Osserviamo che

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

per ogni $t \in (-\pi, \pi/2)$. Di nuovo dalla formula dell'area, dalla compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann e dal teorema fondamentale del calcolo, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{(C,\tau)} F &= \int_{C=\gamma([-\pi,\pi/2])} F \cdot \tau \, dH^1 = \int_{[0,1]} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dL^1(t) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi/2} (\sin t, 1 + \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) \, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi/2} (\cos^2 t - \sin^2 t + \cos t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi/2} (\cos(2t) + \cos t) \, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi/2} D \left[\frac{\sin(2t)}{2} + \sin t \right] \, dt = 1.
\end{aligned}$$

(iii) Sia $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una qualsiasi parametrizzazione di (C, τ). Ricordiamo che, in particolare, si ha $\gamma(a) = (0, 0)$, $\gamma(b) = (1, 1)$ e

$$\tau(\gamma(t)) \, |\gamma'(t)| = \gamma'(t)$$

per ogni $t \in (a, b)$. Ancora una volta dalla formula dell'area, dalla compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann e dal teorema fondamentale del calcolo, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{(C,\tau)} F &= \int_{C=\gamma([a,b])} F \cdot \tau \, dH^1 = \int_{[a,b]} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dL^1(t) \\
&= \int_a^b (\gamma_2(t), \gamma_1(t)) \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) \, dt \\
&= \int_a^b (\gamma_1'(t)\gamma_2(t) + \gamma_1(t)\gamma_2'(t)) \, dt = \int_a^b D[\gamma_1(t)\gamma_2(t)] \, dt \\
&= \gamma_1(b)\gamma_2(b) - \gamma_1(a)\gamma_2(a) = 1.
\end{aligned}$$

3. Studiare le proprietà di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n4^n} \left(x + \frac{1}{x} \right)^n .$$

Risoluzione. La serie assegnata è una serie di potenze mascherata. Infatti essa si ottiene dalla serie di potenze

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n4^n} y^n$$

sostituendo y con la funzione $f(x) := x + \frac{1}{x}$. Osserviamo che relativamente a tale serie di potenze si ha

$$\rho = \limsup_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n4^n} \right)^{1/n} = \frac{1}{4}$$

e quindi il raggio di convergenza è $R = 1/\rho = 4$. Inoltre la serie (1) converge in -4 (criterio di Leibniz) e non converge in 4 (serie armonica). Ne segue che

(i) L'insieme di convergenza di (1) è $[-4, 4)$.

Per quanto riguarda la funzione, osserviamo che:

(ii) Il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(iii) f è dispari e di classe C^∞.

(iv) f è strettamente decrescente in $(0, 1)$ e strettamente crescente in $(1, +\infty)$, con

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

In particolare, 1 è il punto di minimo di $f|_{(0,+\infty)}$, con $f(1) = 2$.

(v) Per (iii) e (iv): f è strettamente decrescente in $(-1, 0)$ e strettamente crescente in $(-\infty, -1)$, con

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Inoltre -1 è il punto di massimo di $f|_{(-\infty,0)}$, con $f(-1) = -2$.

(vi) L'insieme delle soluzioni di $x + \frac{1}{x} = r$, cioè $f^{-1}(r)$, è non vuoto se e solo se $r \in [2, +\infty) \cup (-\infty, -2]$. Risolvendo l'equazione, si trova che si ha esattamente (per ogni $r \in [2, +\infty) \cup (-\infty, -2]$):

$$f^{-1}(r) = \{a(r), b(r)\},$$

con

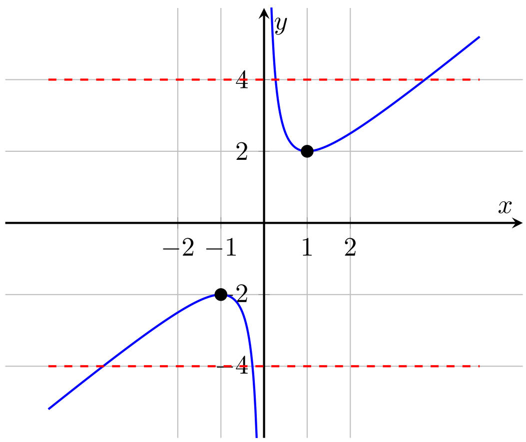
$$a(r) := \frac{r - \sqrt{r^2 - 4}}{2}, \quad b(r) := \frac{r + \sqrt{r^2 - 4}}{2}.$$

In particolare, si ha

$$f^{-1}(4) = \{2 \pm \sqrt{3}\}, \quad f^{-1}(-4) = \{-2 \pm \sqrt{3}\}.$$

(vii) $f^{-1}([-r,r])$ è non vuoto se e solo se $r \geq 2$. In tal caso $f^{-1}([-r,r])$ è compatto e più precisamente si ha

$$f^{-1}([-r,r]) = f^{-1}([-r,r] \setminus (-2,2)) = [a(-r), b(-r)] \cup [a(r), b(r)].$$



Possiamo ora descrivere le proprietà di convergenza:

- **Convergenza puntuale.** Grazie alle proprietà di f (ricavate sopra) possiamo affermare che, indicato con D l'insieme di convergenza puntuale della serie assegnata, si ha

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,|\, f(x) \in [-4,4)\} = f^{-1}([-4,4)) \\ &= [-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}] \cup (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

- **Convergenza totale.** Ricordiamo che la serie di potenze (1) converge totalmente in $(C([-r,r]), \|\cdot\|_{\infty,[-r,r]})$, per ogni $r \in (0,R) = (0,4)$. Ma per ogni $r \in [2,4)$ e per ogni $n = 1,2,\ldots$, si ha

$$\begin{aligned} \|n^{-1}4^{-n}y^n\|_{\infty,[-r,r]} &= \|n^{-1}4^{-n}y^n\|_{\infty,[-r,r]\setminus(-2,2)} \\ &= \|n^{-1}4^{-n}f(x)^n\|_{\infty,f^{-1}([-r,r])} \\ &= \|n^{-1}4^{-n}f(x)^n\|_{\infty,[a(-r),b(-r)]\cup[a(r),b(r)]}. \end{aligned}$$

Quindi la serie assegnata converge totalmente in

$$\left(C([a(-r),b(-r)] \cup [a(r),b(r)]), \|\cdot\|_{\infty,[a(-r),b(-r)]\cup[a(r),b(r)]}\right)$$

per ogni $r \in [2,4)$. Da questo si ottiene facilmente anche il seguente risultato: Se E è un qualsiasi sottoinsieme compatto di

$$\begin{aligned} \operatorname{int} D &= (-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}) \cup (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}) \\ &= (a(-4), b(-4)) \cup (a(4), b(4)) \end{aligned}$$

allora la serie assegnata converge totalmente in $(C(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$. Infatti, è facile provare che per $r \in (0,4)$ sufficientemente vicino a 4 si ha

$$E \subset [a(-r), b(-r)] \cup [a(r), b(r)]$$

e quindi

$$\|n^{-1}4^{-n}f(x)^n\|_{\infty,E} \leq \|n^{-1}4^{-n}f(x)^n\|_{\infty,[a(-r),b(-r)]\cup[a(r),b(r)]}.$$

Poiché (come abbiamo visto) la serie assegnata converge totalmente in $(C([a(-r), b(-r)] \cup [a(r), b(r)])), \|\cdot\|_{\infty,[a(-r),b(-r)]\cup[a(r),b(r)]})$, da questa disuguaglianza segue che la serie converge totalmente anche in $(C(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$.