Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2024/2025

2 settembre 2025 - III appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Rappresentare graficamente l'insieme E dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$x = 0, \quad -y \le z \le 1, \quad y \le 1, \quad (y-1)^2 + z^2 \ge 1.$$

Calcolare

$$\int_V y(x^2 + z^2)\, dL^3,$$

dove V è il solido ottenuto da una rotazione completa di E intorno all'asse y.

Risoluzione. Osserviamo che $V_y = \emptyset$ se $y \notin [-1, 1]$. Se invece $y \in [-1, 1]$, allora V_y è una corona circolare, di cui indicheremo con $r(y)$ e $R(y)$ i raggi minimo e massimo rispettivamente. Più precisamente, si ha

- $R(y) = 1$, per ogni $y \in [-1, 1]$;
- $r(y) = -y$, per ogni $y \in [-1, 0]$;
- $r(y) = (1 - (1-y)^2)^{1/2} = (2y - y^2)^{1/2}$, per ogni $y \in (0, 1]$.

Per il teorema di Fubini e per l'omogeneità dell'integrale, si ha

$$\begin{aligned} I := & \int_V y(x^2 + z^2)\, dL^3 \\ = & \int_{[-1,1]} y \left(\int_{V_y} (x^2 + z^2)\, dL^2(x, z) \right) dL^1(y). \end{aligned}$$

Inoltre, per la formula dell'area (cambio delle coordinate, da cartesiane a polari), di nuovo il teorema di Fubini, per la compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann e per il teorema fondamentale del calcolo (per ogni $y \in [-1, 1]$):

$$
\begin{aligned}
\int_{V_y} (x^2+z^2)\, dL^2(x,z) &= \int_{r(y)}^{R(y)} \left(\int_0^{2\pi} [(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2]\rho\, d\theta \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_{r(y)}^{R(y)} \rho^3\, d\rho \\
&= \frac{\pi}{2} \left(R(y)^4 - r(y)^4 \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(1 - r(y)^4 \right).
\end{aligned}
$$

Quindi, di nuovo per la compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann. e infine per il teorema fondamentale del calcolo:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2} \int_{[-1,1]} y \left(1 - r(y)^4 \right) \, dL^1(y) \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{[-1,0]} y \left(1 - r(y)^4 \right) \, dL^1(y) + \frac{\pi}{2} \int_{(0,1]} y \left(1 - r(y)^4 \right) \, dL^1(y) \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{[-1,0]} y \left(1 - y^4 \right) \, dL^1(y) + \frac{\pi}{2} \int_{(0,1]} y \left(1 - (2y - y^2)^2 \right) \, dL^1(y) \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{0} \left(y - y^5 \right) \, dy + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(y - 4y^3 + 4y^4 - y^5 \right) \, dy \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^6}{6} \right)_{-1}^{0} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{y^2}{2} - y^4 + \frac{4y^5}{5} - \frac{y^6}{6} \right)_0^1 \\
&= -\frac{\pi}{10}.
\end{aligned}
$$

2. Sia C il cilindro solido in $\mathbb{R}^3$ di raggio $\sqrt{2}$ avente per asse la retta

$$\{(0, y, 2-y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$$

e sia

$$\Gamma := \{(x, y, z) \in C \,|\, y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

(i) Fornire una rappresentazione grafica qualitativa di Γ.

(ii) Applicare il teorema della divergenza (di Gauss) per calcolare il flusso Φ del campo

$$F(x, y, z) = (y - x, (z-2)^2, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

attraverso $\Sigma := \partial\Gamma \cap \partial C$ (i.e. la porzione cilindrica di $\partial\Gamma$), orientata con il campo normale uscente da C.

Risoluzione.
Osserviamo subito che $\partial\Gamma$ è una superficie regolare a tratti con tre tratti regolari. Più precisamente si ha

$$\partial\Gamma = \Sigma \cup E_1 \cup E_2$$

dove E_1 ed E_2 sono, rispettivamente, l'ellisse ottenuta dall'intersezione di C col piano xy e l'ellisse ottenuta dall'intersezione di C col piano xz. Osserviamo che $\operatorname{div} F \equiv 0$ e quindi, indicato con N il campo normale esterno a $\partial\Gamma$, dal teorema della divergenza si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Gamma \operatorname{div} F \, dL^3 = \int_{\partial\Gamma} F \cdot N \, dH^2 \\ &= \int_\Sigma F \cdot N \, dH^2 + \int_{E_1} F \cdot N \, dH^2 + \int_{E_2} F \cdot N \, dH^2 \end{aligned}$$

da cui segue

$$\Phi = \int_\Sigma F \cdot N \, dH^2 = -\int_{E_1} F \cdot N \, dH^2 - \int_{E_2} F \cdot N \, dH^2.$$

Poiché

$$N|_{E_1} = (0, 0, -1), \quad N|_{E_2} = (0, -1, 0)$$

si ha anche

$$\begin{aligned} \int_{E_1} F \cdot N \, dH^2 &= \int_{E_1} (y - x, (z-2)^2, z) \cdot (0, 0, -1) \, dH^2 \\ &= \int_{E_1} -z \, dH^2 = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{E_2} F \cdot N \, dH^2 &= \int_{E_2} (y - x, (z-2)^2, z) \cdot (0, -1, 0) \, dH^2 \\ &= -\int_{E_2} (z-2)^2 \, dH^2. \end{aligned}$$

Quindi

$$\Phi = \int_{E_2} (z-2)^2 \, dH^2. \tag{1}$$

Per calcolare quest'ultimo integrale, ci serve una $(2,3)$-parametrizzazione dell'ellisse E_2. Osserviamo che:

- E_2 è contenuta nel piano xz ed è centrata in $(0,0,2)$.
- I semiassi di E_2 sono paralleli all'asse x e all'asse z. Essi hanno lunghezza $\sqrt{2}$ e 2, rispettivamente.

Pertanto

$$E_2 = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2/2 + (z-2)^2/4 \leq 1\}$$

e dunque una $(2,3)$-parametrizzazione di E_2 è data da

$$\varphi(\rho,\theta) := (0,0,2) + (\rho\sqrt{2}\cos\theta, 0, 2\rho\sin\theta), \quad (\rho,\theta) \in R := [0,1] \times [0,2\pi].$$

Si trova subito che

$$\begin{aligned} D_1\varphi(\rho,\theta) \times D_2\varphi(\rho,\theta) &= (\sqrt{2}\cos\theta, 0, 2\sin\theta) \times (-\sqrt{2}\rho\sin\theta, 0, 2\rho\cos\theta) \\ &= (0, -2\sqrt{2}\rho, 0) \end{aligned}$$

per cui

$$J\varphi(\rho,\theta) = \|D_1\varphi(\rho,\theta) \times D_2\varphi(\rho,\theta)\| = 2\sqrt{2}\rho.$$

Allora, da (1), dalla formula dell'area e dal teorema di Fubini (ricordando anche il teorema di compatibilità fra integrale di Lebesgue e integrale di Riemann), otteniamo

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{E_2=\varphi(R)} (z-2)^2 \, dH^2 = \int_R (4\rho^2\sin^2\theta) \, 2\sqrt{2}\rho \, dL^2(\rho,\theta) \\ &= 8\sqrt{2} \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = 2\sqrt{2}\,\pi. \end{aligned}$$

3. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ così definita

$$f_n(x) := \frac{e^{nx+\frac{2}{nx}}}{x}.$$

(i) Tracciare un grafico qualitativo di f_n.

(ii) Descrivere le proprietà di convergenza di $\{f_n\}$.

Risoluzione. (i) Le seguenti proprietà permettono di tracciare facilmente un grafico qualitativo di f_n $(n = 1, 2, \ldots)$:

- Per $x < 0$ si ha $f_n(x) < 0$ e per $x > 0$ si ha $f_n(x) > 0$;
- f_n è di classe C^1 e si ha

  $$f_n'(x) = \frac{e^{nx+\frac{2}{nx}}}{x^2} \cdot \left[x \left(n - \frac{2}{nx^2} \right) - 1 \right] = \frac{ne^{nx+\frac{2}{nx}}}{x^3} \cdot \left(x^2 - \frac{x}{n} - \frac{2}{n^2} \right)$$

  e cioè

  $$f_n'(x) = \frac{ne^{nx+\frac{2}{nx}}}{x^3} \cdot \left(x + \frac{1}{n} \right) \left(x - \frac{2}{n} \right).$$

  Pertanto

  – I punti stazionari di f_n sono $-1/n$ e $2/n$;
  – In $(-\infty, -1/n) \cup (0, 2/n)$ la derivata f_n' è negativa e quindi $f_n|_{(-\infty,-1/n]}$ e $f_n|_{(0,2/n]}$ sono strettamente decrescenti;
  – In $(-1/n, 0) \cup (2/n, +\infty)$ la derivata f_n' è positiva e quindi $f_n|_{[-1/n,0)}$ e $f_n|_{[2/n,+\infty)}$ sono strettamente crescenti.

  Allora $-1/n$ è il punto di minimo globale, con

  $$f_n(-1/n) = -ne^{-3}, \tag{2}$$

  mentre $2/n$ è un punto di minimo locale, con

  $$f_n(2/n) = ne^3/2.$$

- $\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = 0-$, cioè l'asse x è un asintoto del grafico di f_n per $x \to -\infty$. Inoltre $\lim_{x \to -\infty} f_n'(x) = 0$.
- $\lim_{x \to 0-} f_n(x) = 0-$ e $\lim_{x \to 0-} f_n'(x) = 0-$.
- $\lim_{x \to 0+} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

(ii) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0. \\ +\infty & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Quindi l'insieme di convergenza puntuale di $\{f_n\}$ è $(-\infty, 0)$, mentre la funzione limite puntuale di $\{f_n\}$ è

$$f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

Passiamo ora allo studio della convergenza uniforme di $\{f_n\}$. Intanto, per (2), si ha

$$\sup_{x\in(-\infty,0)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(-\infty,0)} (-f_n(x)) = -f_n(-1/n) = ne^{-3},$$

da cui segue

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in(-\infty,0)} |f_n(x) - f(x)| = +\infty.$$

Pertanto $\{f_n\}$ non converge uniformemente (a f) in $(-\infty, 0)$. Per concludere, verificheremo che $\{f_n\}$ converge uniformemente (a f) in $(-\infty, a]$, per ogni $a < 0$. Infatti, se $a < 0$, per n sufficientemente grande (basta che $a \leq -1/n$), si ha che $-f_n|_{(-\infty,a]}$ è crescente e quindi

$$\sup_{x\in(-\infty,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(-\infty,a]} (-f_n(x)) = -f_n(a).$$

Poiché a appartiene all'insieme di convergenza puntuale di $\{f_n\}$, ne segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in(-\infty,a]} |f_n(x) - f(x)| = -f(a) = 0,$$

cioè $\{f_n\}$ converge uniformemente (a f) in $(-\infty, a]$.