

Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2024/2025

7 gennaio 2026 - IV appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Sia E l'insieme compatto del primo quadrante (del piano cartesiano) racchiuso dalle curve

$$x + y = 1, \quad x + y = 3, \quad x - y^2 = 0, \quad x - y^2 = 1.$$

Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito come segue

$$F(x, y) = (-xy - y^2/2, x^2y + 2xy^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Rappresentare graficamente E ;
- Usare la formula di Green per calcolare l'integrale $\int_{\partial E} F \cdot \tau_E dH^1$, dove τ_E denota l'orientazione positiva di ∂E .

Risoluzione. Osserviamo che per ogni $(x, y) \in E$ esiste uno ed un solo $(s, t) \in R := [1, 3] \times [0, 1]$ tale che

$$\begin{cases} x + y = s \\ x - y^2 = t. \end{cases}$$

Invertendo tale sistema, otteniamo

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + s - \frac{\sqrt{1+4(s-t)}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{1+4(s-t)}}{2} - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Quindi la mappa

$$\varphi : R \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(s, t) := \left(\frac{1}{2} + s - \frac{\sqrt{1+4(s-t)}}{2}, \frac{\sqrt{1+4(s-t)}}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

trasforma R in E . Inoltre si verifica facilmente che essa è una $(2, 2)$ -parametrizzazione regolare (di E), con

$$J\varphi(s, t) = |\det(D\varphi(s, t))| = \frac{1}{\sqrt{1+4(s-t)}},$$

per ogni $(s, t) \in (1, 3) \times (0, 1)$.

Dalla formula di Green e dalla formula dell'area, otteniamo quindi

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\partial E} F \cdot \tau_E dH^1 = \int_E (D_1(x^2y + 2xy^2) - D_2(-xy - y^2/2)) dL^2 \\ &= \int_E (2xy + 2y^2 + x + y) dL^2 = \int_{E=\varphi(R)} (2y + 1)(x + y) dL^2 \\ &= \int_R \sqrt{1 + 4(s - t)} \cdot s \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 4(s - t)}} dL^2 \end{aligned}$$

e cioè

$$I = \int_R s dL^2.$$

Infine, per il teorema di Fubini e per le compatibilità fra misura e integrale e fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann, otteniamo

$$\begin{aligned} I &= \int_{[1,3]} \left(\int_{[0,1]} s dL^1(t) \right) dL^1(s) = \int_{[1,3]} s \left(\int_{[0,1]} 1 dL^1(t) \right) dL^1(s) \\ &= \int_{[1,3]} s L^1([0, 1]) dL^1(s) = \int_1^3 s ds = 4. \end{aligned}$$

2. Sia C la curva ottenuta intersecando il cilindro ellittico

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

col grafico della funzione $(x, y) \mapsto xy$. Calcolare

$$\int_C \sqrt{1 + 3y^2 + 4((x/2)^2 - y^2)^2} dH^1.$$

Risoluzione. Ricordiamo che la mappa $t \mapsto (2 \cos t, \sin t)$, $t \in [2, \pi]$, è una $(1, 2)$ -parametrizzazione regolare dell'ellisse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Quindi $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita come segue

$$\gamma(t) := (2 \cos t, \sin t, 2 \cos t \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

è una $(1, 3)$ -parametrizzazione regolare di C , con

$$\begin{aligned} |\gamma'(t)| &= |(-2 \sin t, \cos t, -2 \sin^2 t + 2 \cos^2 t)| \\ &= \sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t + 4(\cos^2 t - \sin^2 t)^2} \\ &= \sqrt{1 + 3 \sin^2 t + 4(\cos^2 t - \sin^2 t)^2}. \end{aligned}$$

Dalla formula dell'area e dalla compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann, otteniamo allora

$$\begin{aligned} I &:= \int_{C=\gamma([0, 2\pi])} \sqrt{1 + 3y^2 + 4((x/2)^2 - y^2)^2} dH^1 \\ &= \int_{[0, 2\pi]} 1 + 3 \sin^2 t + 4(\cos^2 t - \sin^2 t)^2 dL^1(t) \\ &= \int_0^{2\pi} 1 + 3 \sin^2 t + 4 \cos^2(2t) dt \\ &= 2\pi + 3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + 2 \int_0^{4\pi} \cos^2 s ds \end{aligned}$$

e cioè $I = 9\pi$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione 2π -periodica e dispari tale che

$$f|_{(0,\pi)} = 2\chi_{(0,\pi/3)} + \chi_{(2\pi/3,\pi)}.$$

- Disegnare il grafico di f .
- Descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di f e fare un esempio di insieme in cui la convergenza è uniforme.
- Calcolare a_n (per ogni n), b_1 e b_{10} .

Risoluzione.

- Relativamente al grafico di f , ricordiamo che, essendo f dispari e 2π -periodica, si ha (per ogni intero n)

$$f(n\pi) = 0.$$

- Osserviamo che $f \in L^2(-\pi, \pi)$, in quanto f è misurabile e limitata. Quindi la serie di Fourier di f converge a f incondizionatamente in $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$ e puntualmente quasi ovunque.
- Inoltre f è regolare a tratti. Quindi la serie di Fourier di f in x :
 - converge a $f(x)$, per ogni $x \notin \{\pm\pi/3, \pm2\pi/3\} + 2\pi\mathbb{Z}$;
 - converge a 1 (risp. -1) per $x \in \{\pi/3\} + 2\pi\mathbb{Z}$ (risp. $x \in \{-\pi/3\} + 2\pi\mathbb{Z}$);
 - converge a $1/2$ (risp. $-1/2$) per $x \in \{2\pi/3\} + 2\pi\mathbb{Z}$ (risp. $x \in \{-2\pi/3\} + 2\pi\mathbb{Z}$).
- Un esempio di insieme in cui la convergenza della serie di Fourier di f è uniforme è $[\pi/5, \pi/4]$.
- Poiché f è dispari, si ha

$$a_n = 0, \text{ per ogni } n \geq 0$$

e (per ogni $n \geq 1$)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/3} \sin(nt) dt + \frac{2}{\pi} \int_{2\pi/3}^\pi \sin(nt) dt \\ &= \frac{4}{n\pi} [\cos(nt)]_{\pi/3}^0 + \frac{2}{n\pi} [\cos(nt)]_\pi^{2\pi/3} \\ &= \frac{4}{n\pi} (1 - \cos(n\pi/3)) + \frac{2}{n\pi} (\cos(2n\pi/3) + (-1)^{n+1}). \end{aligned}$$

In particolare,

$$b_1 = \frac{4}{\pi}(1 - 1/2) + \frac{2}{\pi}(-1/2 + 1) = \frac{3}{\pi}$$

e

$$b_{10} = \frac{4}{10\pi}(1 - \cos(10\pi/3)) + \frac{2}{10\pi}(\cos(20\pi/3) - 1) = \frac{3}{10\pi}.$$