

Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2024/2025

2 febbraio 2026 - V appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Indicato con C il cilindro circolare di raggio 1 avente come asse la retta generata dal vettore $(0, 1, 1)$, definiamo

$$E := \{(x, y, z) \in C \mid 0 \leq z \leq 1\}.$$

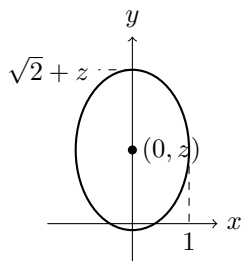
Rappresentare graficamente E_z e calcolare

$$\int_E x^2 + \left(\frac{y-z}{\sqrt{2}}\right)^2 dL^3(x, y, z).$$

Risoluzione. Per il teorema di Fubini (sezioni piane orizzontali) si ha

$$\begin{aligned} (1) \quad I &:= \int_E x^2 + \left(\frac{y-z}{\sqrt{2}}\right)^2 dL^3(x, y, z) \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_{E_z} x^2 + \left(\frac{y-z}{\sqrt{2}}\right)^2 dL^2(x, y) \right) dL^1(z). \end{aligned}$$

Osserviamo che, per $z \in [0, 1]$, la sezione E_z è l'ellisse centrata in $(0, z)$ con raggio parallelo all'asse x uguale a 1 e raggio parallelo all'asse y uguale a $\sqrt{2}$ (si veda figura sottostante).



Ora, indicato con D il disco chiuso di raggio 1 centrato nell'origine, la mappa

$$\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(s, t) = (s, t\sqrt{2}) + (0, z) = (s, t\sqrt{2} + z)$$

è una $(2, 2)$ -parametrizzazione regolare di E_z e si ha

$$J\varphi(s, t) = |\det D\varphi(s, t)| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2},$$

per ogni (s, t) tale che $s^2 + t^2 < 1$. Quindi, per la formula dell'area,

$$(2) \quad \int_{E_z = \varphi(D)} x^2 + \left(\frac{y - z}{\sqrt{2}} \right)^2 dL^2(x, y) = \sqrt{2} \int_D s^2 + t^2 dL^2(s, t).$$

Usando di nuovo la formula dell'area (cambio di variabili da Cartesiane a polari) e poi il teorema di Fubini (e usando anche la compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann e il teorema fondamentale del calcolo), otteniamo

$$(3) \quad \begin{aligned} \int_D s^2 + t^2 dL^2(s, t) &= \int_{[0,1] \times [0,2\pi]} \rho^3 dL^2(\rho, \theta) \\ &= \int_{[0,2\pi]} \left(\int_{[0,1]} \rho^3 dL^1(\rho) \right) dL^1(\theta) \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho^3 d\rho \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Da (1), (2) e (3) segue finalmente che

$$I = \int_{[0,1]} \frac{\sqrt{2}\pi}{2} dL^1(z) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2. Rappresentare graficamente l'insieme

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3\pi/2, 0 \leq y \leq 1 + \sin x\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\int_S yz \cos x \, dH^2$$

dove S è il grafico della funzione $D \ni (x, y) \mapsto y$.

Risoluzione. La mappa

$$\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y) = (x, y, y)$$

è una $(2, 3)$ -parametrizzazione regolare di S . Osserviamo che

$$J\varphi(x, y) = \|D_1\varphi(x, y) \times D_2\varphi(x, y)\| = \|(1, 0, 0) \times (0, 1, 1)\| = \sqrt{2},$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $0 < x < 3\pi/2$ e $0 < y < 1 + \sin x$. Quindi, per la formula dell'area,

$$I := \int_{S=\varphi(D)} yz \cos x \, dH^2(x, y, z) = \sqrt{2} \int_D y^2 \cos x \, dL^2(x, y).$$

Ora, dal teorema di Fubini, dalla compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann e per il teorema fondamentale del calcolo,

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{D_x} y^2 \cos x \, dL^1(y) \right) dL^1(x) \\ &= \sqrt{2} \int_{[0, 3\pi/2]} \cos x \left(\int_{[0, 1+\sin x]} y^2 \, dL^1(y) \right) dL^1(x) \\ &= \sqrt{2} \int_0^{3\pi/2} \cos x \left(\int_0^{1+\sin x} y^2 \, dy \right) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^{3\pi/2} \cos x (1 + \sin x)^3 \, dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} [(1 + \sin x)^4]_{x=0}^{x=3\pi/2} = -\frac{\sqrt{2}}{12}. \end{aligned}$$

3. Studiare le proprietà di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^x \sin(x^{2n}), \quad x \in [-1, 1].$$

Risoluzione. Poniamo per semplicità

$$a_n(x) := n^x \sin(x^{2n}) \quad (n = 1, 2, \dots, x \in [-1, 1])$$

e indichiamo con D l'insieme di convergenza puntuale della serie.

Convergenza puntuale. Osserviamo che:

- $a_n(-1) = (\sin 1)/n$, $a_n(0) = 0$ e $a_n(1) = n \sin 1$. Quindi

$$0 \in D, \quad \pm 1 \notin D.$$

- Sia $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ e $n \geq 1$. Allora $a_n(x) > 0$ e

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \frac{\sin(x^{2n+2})}{\sin(x^{2n})} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \frac{\sin(x^{2n+2})}{x^{2n+2}} \cdot \frac{x^{2n}}{\sin(x^{2n})} \cdot x^2,$$

da cui segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = x^2 \in (0, 1).$$

Quindi $x \in D$ e dunque

$$D = \{0\} \cup (-1, 0) \cup (0, 1) = (-1, 1).$$

Convergenza totale. Sia $\alpha \in (-1, 1)$, fissato arbitrariamente. Allora:

- Si ha

$$\|a_n\|_{\infty, [\alpha, 1)} \geq a_n(1) = n \sin 1$$

e quindi la serie non converge totalmente in $(C_b([\alpha, 1)), \|\cdot\|_{\infty, [\alpha, 1)})$. Analogamente si ha

$$\|a_n\|_{\infty, (-1, \alpha]} \geq a_n(-1) = \frac{\sin 1}{n}$$

e quindi la serie non converge totalmente nemmeno in $(C_b((-1, \alpha]), \|\cdot\|_{\infty, (-1, \alpha]})$.

- A maggior ragione, la serie non converge totalmente in $(C_b((-1, 1)), \|\cdot\|_{\infty, (-1, 1)})$.

- Supponiamo $\alpha \in (0, 1)$ e sia $x \in [-\alpha, \alpha]$, $n \geq 1$. Allora

$$n^x \leq n^\alpha, \quad \sin(x^{2n}) \leq \sin(\alpha^{2n})$$

e quindi

$$a_n(x) = n^x \sin(x^{2n}) \leq n^\alpha \sin(\alpha^{2n}) = a_n(\alpha).$$

Si ha pertanto

$$\|a_n\|_{\infty, [-\alpha, \alpha]} = a_n(\alpha).$$

Poiché $\alpha \in D$, questo implica che la serie converge totalmente in $(C([-\alpha, \alpha]), \|\cdot\|_{\infty, [-\alpha, \alpha]})$. Quindi la serie converge anche uniformemente in $[-\alpha, \alpha]$.