Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2024/2025

10 giugno 2025 - I appello

* * *

1. Sia
$$E := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2(x^2+y^2)^{1/2} \leq z \leq 3 - x^2 - y^2\right\}.$$
Fornire una rappresentazione grafica qualitativa di E e calcolare
$$\int_E |z-2| \, dL^3.$$

2. Si consideri la superficie
$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 8,\ z \geq (x^2+y^2)^{1/2}\right\}$$
e il campo vettoriale
$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) := (-y, x, z).$$
Inoltre sia $N = (N_1, N_2, N_3)$ il campo normale a S (continuo) tale che $N_3 > 0$.

- Dare una rappresentazione qualitativa di S;
- Verificare il teorema di Stokes $\int_{(S,N)} \operatorname{rot} F = \int_{\partial(S,N)} F$, calcolando separatamente i due membri dell'identità.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione pari e 2π-periodica tale che
$$f|_{[0,\pi/2)} = \sin|_{[0,\pi/2)}, \quad f|_{[\pi/2,\pi]} = \sin|_{[\pi/2,\pi]} - 1.$$

- Disegnare il grafico di f.
- Descrivere e motivare le proprietà di convergenza della serie di Fourier della funzione f. In particolare, fare un esempio di insieme in cui la serie di Fourier di f converge uniformemente a f.
- Calcolare a_0, a_2 e b_n (per ogni $n \geq 1$).