

Eserciziario di Analisi Matematica

Equazioni Differenziali Ordinarie

1 Risoluzione esplicita di EDO del primo ordine

Trovare la soluzione generale delle seguenti EDO lineari:

1.

$$y'(x) + y(x) \sin x = (1 + \cos x) \sin x.$$

2.

$$y'(x) - e^x y(x) = e^{2x}.$$

3.

$$y'(x) - y(x) \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \sin x.$$

4.

$$y'(x) + \frac{2}{x} y(x) = e^x + 1.$$

5.

$$y'(x) - \frac{y(x)}{1 + e^x} = e^{-x}.$$

6.

$$y'(x) = y(x) \ln x + x^x.$$

7.

$$y'(x) + y(x) \cos x = \sin 2x.$$

Trovare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy per EDO lineari:

8.

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{xy(x)}{1+x^2} = 1+x, \\ y(0) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

9.

$$\begin{cases} 2y'(x) - \frac{y(x)}{\sqrt{x}} = x, \\ y(1) = -16. \end{cases}$$

10.

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x^2 - 1} = \sqrt{x + 1}, \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Integrare le seguenti EDO a variabili separabili:

11.

$$y(x)y'(x) = e^{x-y(x)} \sin x.$$

12.

$$\frac{xy'(x)}{y(x)} = 1 - x^4.$$

13.

$$(2 - e^x)y'(x) + e^{x+2y(x)} = 0.$$

14.

$$x \sin x \sin y(x) - (1 - \cos y(x))y'(x) = 0.$$

15.

$$y'(x) = (x + y(x))^2 - x - y(x) - 1.$$

16.

$$y'(x) = y^2(x) \ln(x + 3).$$

Studiare i seguenti problemi di Cauchy per EDO a variabili separabili:

17.

$$\begin{cases} xy'(x) + y^2(x) = 3y(x) - 2, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

18.

$$\begin{cases} y(x)y'(x) + (y(x) + 2) \sin^2 x = 0, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} y'(x)(y(x) - 3)(x + 1) = (y(x) - 2)^2(x + 2), \\ y(-2) = -1. \end{cases}$$

Integrare le seguenti EDO di Bernoulli:

20.

$$y'(x) - \frac{y(x)}{2(1 + 2e^x)} = \frac{1}{y(x)}.$$

21.

$$3y'(x) + \frac{y(x)}{2e^{-x} - 1} = -(e^{-x} + 1)y^4(x).$$

22.

$$y'(x) - 2y(x) = 2(e^x + x)\sqrt{y(x)}.$$

23.

$$y'(x) + \frac{2}{3}y(x) = \frac{e^{-x} \sin x}{\sqrt{y(x)}}.$$

24.

$$y'(x) + \frac{1}{2}y(x) = y^3(x)(1 + xe^x).$$

25.

$$y'(x) - 2y(x) = 2y^{3/2}(x) \ln \frac{1}{1 + e^x}.$$

26.

$$y'(x) + 9\frac{y(x)}{x} = 3\frac{e^x}{x^2}y^{2/3}(x).$$

27.

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = -y^2(x)\frac{\ln x}{x}.$$

28.

$$4y'(x) + y(x) = (x^3 - 4x)y^{-3}(x).$$

2 Studio qualitativo di problemi di Cauchy

Studiare qualitativamente i seguenti problemi di Cauchy. In particolare:

- Studiare esistenza e unicità, locale e globale;
- Studiare monotonia e punti critici;
- Discutere il comportamento qualitativo agli estremi del dominio.

29.

$$\begin{cases} y'(x) = -\sin x - \arctan(y(x)), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

30.

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{x} - \arctan(y(x)), \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

31.

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x}{1-x^2} + \sin(y(x)), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

32.

$$\begin{cases} y'(x) = \tan x - \ln(1 + y^2(x)), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

33.

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{1-y(x)} + \sin x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

34.

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - \frac{x}{y(x)}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

35.

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{y(x)} - x, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

36.

$$\begin{cases} y'(x) = y^6(x) - y^3(x) - 2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

37.

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{\sin(xy(x))}{3-y(x)}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

38.

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x) + x}{y(x) - x}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Riferimenti bibliografici

- [1] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Lezioni di Analisi Matematica Due*, Zanichelli, 2020.
- [2] E. Giusti, *Esercizi e complementi di Analisi matematica, Volume secondo*, Bollati Boringhieri, Torino, 2000.