

Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2025/2026

12 giugno 2026 - I appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

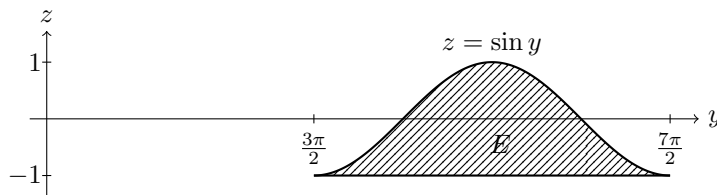
1. Sia

$$E := \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3\pi/2 \leq y \leq 7\pi/2, -1 \leq z \leq \sin y\}$$

e sia Σ il solido ottenuto dalla rotazione completa di E intorno all'asse z .

- Fornire una rappresentazione grafica di E .
- Calcolare $\int_{\Sigma} z^2 dL^3(x, y, z)$.

Risoluzione.



Dal teorema di Fubini (sezioni piane orizzontali) e dalla compatibilità misura-integrale otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} z^2 dL^3 &= \int_{[-1,1]} \left(\int_{\Sigma_z} z^2 dL^2(x, y) \right) dL^1(z) \\ &= \int_{[-1,1]} z^2 L^2(\Sigma_z) dL^1(z). \end{aligned}$$

Osserviamo che Σ_z è la corona circolare nel piano xy centrata nell'origine e di raggi

$$2\pi + \arcsin z, \quad 3\pi - \arcsin z.$$

Quindi

$$\begin{aligned} L^2(\Sigma_z) &= \pi[(3\pi - \arcsin z)^2 - (2\pi + \arcsin z)^2] \\ &= 5\pi^2(\pi - 2\arcsin z). \end{aligned}$$

Otteniamo allora, ricordando anche la compatibilità fra l'integrale di Riemann e l'integrale di Lebesgue,

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} z^2 dL^3 &= 5\pi^2 \int_{[-1,1]} (\pi - 2 \arcsin z) z^2 dL^1(z) \\ &= 5\pi^3 \int_{-1}^1 z^2 dz - 10\pi^2 \int_{-1}^1 z^2 \arcsin z dz.\end{aligned}$$

Osserviamo che l'ultimo integrale di questa uguaglianza è nullo, perché la funzione integranda è dispari. Pertanto

$$\int_{\Sigma} z^2 dL^3 = 5\pi^3 \int_{-1}^1 z^2 dz = \frac{10}{3}\pi^3.$$

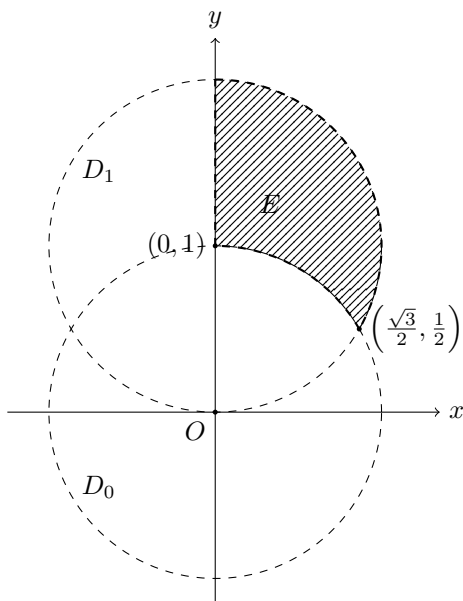
2. Siano D_0 e D_1 , rispettivamente, il disco chiuso di raggio 1 centrato nell'origine e il disco aperto di raggio 1 centrato in $(0, 1)$. Definiamo inoltre

$$E := \{(x, y) \in D_1 \setminus D_0 \mid x > 0\}, \quad S := \{(x, y, xy) \mid (x, y) \in E\}.$$

Rappresentare graficamente E e calcolare l'integrale

$$\int_S \frac{xy + z}{(1 + x^2 + y^2)^{1/2}} dH^2.$$

Risoluzione.



Poniamo

$$I := \int_S \frac{xy + z}{(1 + x^2 + y^2)^{1/2}} dH^2$$

e osserviamo che S è il grafico della funzione

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := xy.$$

Consideriamo allora la $(2, 3)$ -parametrizzazione cartesiana di S

$$\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(x, y) := (x, y, f(x, y)) = (x, y, xy)$$

e ricordiamo che

$$J\Phi(x, y) = (1 + |\nabla f(x, y)|^2)^{1/2} = (1 + x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Quindi, per la formula dell'area,

$$(1) \quad I = \int_{S=\Phi(E)} \frac{xy+z}{(1+x^2+y^2)^{1/2}} dH^2 = \int_E 2xy dL^2.$$

ora E può essere facilmente descritto in coordinate polari. Infatti, in base alla figura soprastante, si vede che:

- La coordinata angolare θ ha come dominio l'intervallo $(\pi/6, \pi/2)$;
- Considerato $\theta \in (\pi/6, \pi/2)$, il modulo ρ varia fra 1 e $2 \sin \theta$.

Pertanto, il cambiamento di variabile da cartesiane a polari che ci serve è dato da

$$\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\theta, \rho) := (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

dove

$$A := \{(\theta, \rho) \mid \pi/6 < \theta < \pi/2, 1 < \rho < 2 \sin \theta\}.$$

Ora, da (equation.1), usando ancora la formula dell'area (ricordando che $J\varphi(\theta, \rho) = \rho$), il teorema di Fubini e la compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann, otteniamo

$$\begin{aligned} I &= \int_{E=\varphi(A)} 2xy dL^2 = \int_A 2\rho^3 \cos \theta \sin \theta dL^2 \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} 2 \cos \theta \sin \theta \left(\int_1^{2 \sin \theta} \rho^3 d\rho \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin \theta (16 \sin^4 \theta - 1) \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Cambiando la variabile, otteniamo infine

$$I = \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 t(16t^4 - 1) dt = \frac{9}{8}.$$

3. Descrivere le proprietà di convergenza della successione di funzioni

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{x}{(x-1)^2 + \frac{1}{n}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Risoluzione.

Convergenza puntuale. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = +\infty$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{x}{(x-1)^2}, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Quindi l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite di $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ sono, rispettivamente,

$$D := \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

e

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{x}{(x-1)^2}.$$

Convergenza uniforme. Osserviamo prima di tutto che, per ogni $x \in D$, si ha

$$(2) \quad |f(x) - f_n(x)| = \frac{|x|}{n(x-1)^2 \left[(x-1)^2 + \frac{1}{n} \right]}.$$

Valgono i seguenti fatti:

(i) Grazie a (2), per ogni intero positivo n , si ha

$$\sup_{y \in D} |f(y) - f_n(y)| \leq \lim_{x \rightarrow 1} |f(x) - f_n(x)| = +\infty$$

e cioè $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ non converge uniformemente (a f) in D .

(ii) Lo stesso argomento di (1) permette di concludere che se $E \subset D$ e 1 è punto di accumulazione di E , allora $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ non converge uniformemente (a f) in E .

(iii) Fissiamo arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e consideriamo

$$E := \mathbb{R} \setminus (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) = (-\infty, 1 - \varepsilon] \cup [1 + \varepsilon, +\infty).$$

Osserviamo poi che:

– Se $|x| \geq 2$, i.e. $x \in (-2, 2)^c$, allora

$$(x-1)^4 \geq (|x| - 1)^4 = |x|^4 \left(1 - \frac{1}{|x|}\right)^4 \geq |x|^4 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{|x|^4}{16}$$

e quindi, per (2equation.2),

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \frac{|x|}{n(x-1)^2 \left[(x-1)^2 + \frac{1}{n} \right]} \\ &\leq \frac{|x|}{n(x-1)^4} \leq \frac{16}{n|x|^3} \\ &\leq \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

In particolare, si ottiene

$$(3) \quad \sup_{x \in E \cap (-2, 2)^c} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{2}{n}.$$

– Sempre per (2equation.2), se $x \in E$ si ha

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n(x-1)^4} \leq \frac{|x|}{n\varepsilon^4}$$

e quindi

$$(4) \quad \sup_{x \in E \cap (-2, 2)} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{2}{n\varepsilon^4}.$$

Da (3equation.3) e (4equation.4) si ottiene finalmente

$$\sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{2}{n} + \frac{2}{n\varepsilon^4}.$$

Questa stima dimostra che $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente (a f) in E .