

Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2025/2026

10 luglio 2026 - II appello

* * *

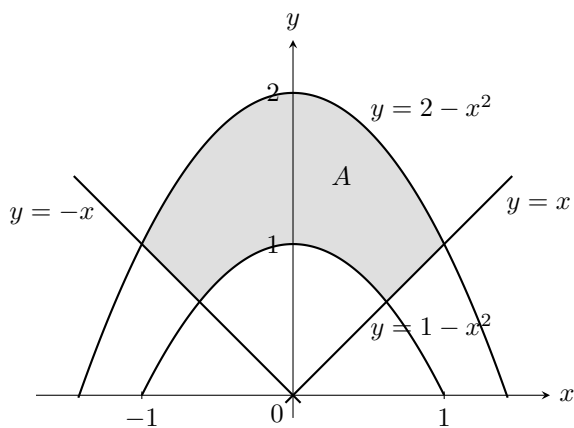
Risoluzione degli esercizi

1. Sia A l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$y \geq -x, \quad y \geq x, \quad y \geq 1 - x^2, \quad y \leq 2 - x^2.$$

- Rappresentare graficamente A ;
- Calcolare $\int_{A \times [0,1]} 2z dL^3$.

Risoluzione.



Usando il teorema di Fubini, il teorema di compatibilità fra l'integrale di Riemann e l'integrale di Lebesgue e il teorema fondamentale del calcolo, si ottiene

$$\begin{aligned} I &:= \int_{A \times [0,1]} 2z dL^3 = \left(\int_{[0,1]} 2z dL^1(z) \right) \left(\int_A 1 dL^2(x, y) \right) \\ &= \left(\int_0^1 2z dz \right) \left(\int_A 1 dL^2(x, y) \right) \\ &= \int_A 1 dL^2(x, y). \end{aligned}$$

Determiniamo le ascisse dei quattro vertici di A . Siano V_1 e V_2 i due vertici nel primo quadrante e assumiamo che V_1 sia quello più vicino all'origine. Siano a_1 e a_2 , rispettivamente, le ascisse di V_1 e V_2 . Allora devono valere le identità

$$1 - a_1^2 = a_1, \quad 2 - a_2^2 = a_2.$$

Poiché $a_1, a_2 > 0$, si ricava subito

$$a_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad a_2 = 1.$$

Ovviamente, per simmetria, le ascisse dei vertici di A nel secondo quadrante sono $-a_2$ e $-a_1$. Quindi, per il teorema di Fubini, per il teorema di compatibilità fra integrale di Lebesgue e integrale di Riemann e per il teorema fondamentale del calcolo, si ha

$$\begin{aligned} \int_A 1 \, dL^2(x, y) &= \int_{[-a_2, a_2]} \left(\int_{A_x} 1 \, dL^1(y) \right) dL^1(x) \\ &= \int_{-a_2}^{a_2} L^1(A_x) \, dx = 2 \int_0^{a_2} L^1(A_x) \, dx \\ &= 2 \int_0^{a_1} L^1(A_x) \, dx + 2 \int_{a_1}^{a_2} L^1(A_x) \, dx \\ &= 2 \int_0^{a_1} 1 \, dx + 2 \int_{a_1}^{a_2} (2 - x^2 - x) \, dx \\ &= 2a_1 + 2 \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right)_{x=a_1}^{x=a_2} \end{aligned}$$

cioè

$$I = \frac{7}{3} - 2a_1 + \frac{2a_1^3}{3} + a_1^2.$$

2. Sia S la superficie ottenuta da una rotazione completa di

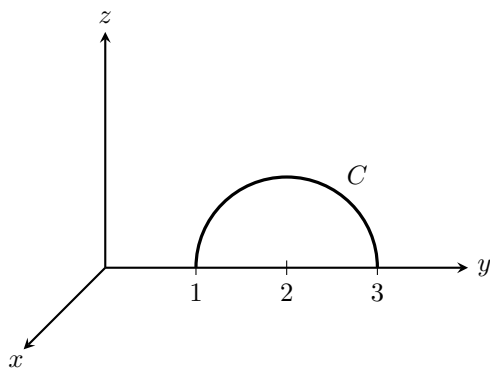
$$C := \{(0, 2 + \cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\} \subset \mathbb{R}^3$$

intorno all'asse z e sia ν il campo normale a S , continuo e tale che $\nu_3 \geq 0$. Inoltre, si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := (yz, xz, xy + yz).$$

- Rappresentare graficamente l'insieme C .
- Verificare la formula di Stokes $\int_{(S, \nu)} \text{rot } F = \int_{\partial(S, \nu)} F$.

Risoluzione.



Osserviamo che ∂S è l'unione delle seguenti due circonferenze del piano xy :

$$\Gamma_1 := \{(\cos t, \sin t, 0) \mid t \in [0, 2\pi]\}, \quad \Gamma_3 := \{3(\cos t, \sin t, 0) \mid t \in [0, 2\pi]\}.$$

Osserviamo ora che per ogni $(x, y, z) \in \partial S$ si ha $z = 0$ e quindi

$$F(x, y, z) = F(x, y, 0) = (0, 0, xy).$$

Inoltre, se indichiamo con τ il campo di vettori unitari tale che $\partial(S, \nu) = (\partial S, \tau)$, si ha che τ è orizzontale, cioè $\tau_3 = 0$. Quindi, per ogni $(x, y, z) = (x, y, 0) \in \partial S$, si ha

$$F(x, y, z) \cdot \tau(x, y, z) = (0, 0, xy) \cdot (\tau_1(x, y, z), \tau_2(x, y, z), 0) = 0.$$

Pertanto

$$\int_{\partial(S, \nu)} F = \int_{(\partial S, \tau)} F = \int_{\partial S} F \cdot \tau dH^1 = 0,$$

cioè il secondo membro nell'identità di Stokes risulta essere nullo. Dobbiamo quindi verificare, con calcolo diretto, che anche il primo membro è nullo e cioè che

$$(1) \quad I := \int_{(S, \nu)} \text{rot } F = \int_S (\text{rot } F) \cdot \nu dH^2 = 0.$$

Per farlo, calcoliamo dapprima $\text{rot } F$ ottenendo facilmente

$$(2) \quad \text{rot } F(x, y, z) = (z, 0, 0), \quad \text{per ogni } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Consideriamo poi la seguente $(2, 3)$ -parametrizzazione $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ di S definita da

$$\varphi(\alpha, \beta) := ((2 + \cos \beta) \cos \alpha, (2 + \cos \beta) \sin \alpha, \sin \beta).$$

Per la formula dell'area e (2) si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_{S=\varphi([0, 2\pi] \times [0, \pi])} (\text{rot } F) \cdot \nu \, dH^2 \\ &= \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} [(\text{rot } F)(\varphi(\alpha, \beta))] \cdot [\nu(\varphi(\alpha, \beta))] J\varphi(\alpha, \beta) \, dL^2 \\ &= \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} [(\text{rot } F)(\varphi(\alpha, \beta))] \cdot [D_1\varphi(\alpha, \beta) \times D_2\varphi(\alpha, \beta)] \, dL^2 \\ &= \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} \varphi_3(\alpha, \beta) [D_1\varphi(\alpha, \beta) \times D_2\varphi(\alpha, \beta)]_1 \, dL^2. \end{aligned}$$

Il consueto calcolo del prodotto vettoriale mostra subito che

$$[D_1\varphi(\alpha, \beta) \times D_2\varphi(\alpha, \beta)]_1 = (2 + \cos \beta) \cos \beta \cos \alpha$$

e quindi, usando anche il Teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} \sin \beta (2 + \cos \beta) \cos \beta \cos \alpha \, dL^2 \\ &= \left(\int_{[0, 2\pi]} \cos \alpha \, dL^1(\alpha) \right) \left(\int_{[0, \pi]} \sin \beta (2 + \cos \beta) \cos \beta \, dL^1(\beta) \right). \end{aligned}$$

Ma per la compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann e per il teorema fondamentale del calcolo, si ha

$$\int_{[0, 2\pi]} \cos \alpha \, dL^1(\alpha) = \int_0^{2\pi} \cos \alpha \, d\alpha = 0,$$

da cui segue la tesi (1).

3. Studiare qualitativamente il seguente problems di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)^2 - x}{x+1} \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Risoluzione. Segue un elenco di proprietà (con le relative dimostrazioni) che si deducono facilmente dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie svolta nel corso. Esse consentono di ottenere immediatamente un grafico qualitativo della soluzione.

(1) Il dominio massimale di esistenza della funzione

$$(3) \quad \frac{y^2 - x}{x + 1}$$

è

$$(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \times \mathbb{R}.$$

Dato che tale funzione è di classe C^1 , la teoria presentata al corso garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione massimale del problema di Cauchy assegnato. Sia essa $u \in C^1((a, b))$. Osserviamo che il punto $(0, -1)$ appartiene alla componente connessa

$$A := (-1, +\infty) \times \mathbb{R}$$

del dominio massimale. Quindi tutto il grafico G di u è contenuto in A . In particolare si ha

$$-1 \leq a < 0 < b \leq +\infty.$$

(2) Indichiamo con F la restrizione ad A della funzione (3). Per ricavare informazioni sulla monotonia di u , studiamo il segno di F . Osserviamo che l'insieme di livello 0

$$A_0 := \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$$

è la parabola di equazione $x = y^2$. L'insieme $A \setminus A_0$ è unione (disgiunta) dell'insieme di livello positivo

$$A_+ := \{(x, y) \in A : F(x, y) > 0\} = \{(x, y) \in A : x < y^2\},$$

e dell'insieme di livello negativo

$$A_- := \{(x, y) \in A : F(x, y) < 0\} = \{(x, y) \in A : x > y^2\}.$$

(3) Si ha

$$u'(0) = F(0, u(0)) = F(0, -1) = 1,$$

cioè G ha pendenza 1 nel punto $(0, -1)$.

(4) Per ogni $x \in (a, 0)$, si ha $(x, u(x)) \in A_+$ e quindi

$$u'(x) = F(x, u(x)) > 0.$$

Pertanto $u|_{(a,0)}$ è strettamente crescente.

(5) Dalla proprietà (4) segue in particolare che esiste $L := \lim_{x \rightarrow a^+} u(x)$. Inoltre, non conosciamo a ma possiamo dire che:

- Se $a > -1$, per il teorema di incontinenza, deve valere $L = -\infty$ (asintoto verticale $x = a$);
- Se $a = -1$ non sappiamo escludere che si verifichi $L = -\infty$ (asintoto verticale $x = -1$), nè che si abbia $L \in \mathbb{R}$. In ogni caso si ha

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} u'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{u(x)^2 - x}{x + 1} = +\infty.$$

(6) Poniamo

$$C := \{c \in (a, b] : u'(x) > 0 \text{ per ogni } x \in (a, c)\}$$

e osserviamo che $0 \in C$, per (4), quindi $C \neq \emptyset$. Sia $\bar{c} := \sup C \leq b$. Poiché $u|_{(0,\bar{c})}$ è crescente, deve essere $\bar{c} < +\infty$ (oltre che, ovviamente, $\bar{c} \geq 0$): altrimenti il grafico di $u|_{(0,\bar{c})}$ intersecherebbe la parabola A_0 , i.e., si avrebbe $u'(x_0) = 0$ per un certo $x_0 \in (a, \bar{c})$ (assurdo!). Allora, per il teorema di incontinenza, si ha anche $\bar{c} < b$. Dato che u' è continua, il teorema della permanenza del segno implica che $u'(\bar{c}) = 0$ e quindi

$$F(\bar{c}, u(\bar{c})) = u'(\bar{c}) = 0, \text{ i.e. } (\bar{c}, u(\bar{c})) \in A_0.$$

(7) Sappiamo da (6) che G interseca la parabola A_0 nel punto $(\bar{c}, u(\bar{c}))$, dove la retta tangente a G è orizzontale. Quindi per $x > \bar{c}$ sufficientemente prossimo a $\bar{c}$, si ha $(x, u(x)) \in A_-$ e dunque

$$u'(x) = F(x, u(x)) < 0.$$

Sia

$$D := \{d \in (\bar{c}, b] : u'(x) < 0 \text{ se } x \in (\bar{c}, d)\}$$

e osserviamo che (per quanto abbiamo stabilito sopra) $D \neq \emptyset$. Sia $\bar{d} := \sup D \leq b$. Poiché $u|_{(\bar{c},\bar{d})}$ è decrescente, deve essere $\bar{d} = +\infty$. Infatti, se supponiamo per assurdo che $\bar{d} < +\infty$, allora, per il teorema di incontinenza, si ha anche $\bar{d} < b$. Dalla continuità di u' e dal teorema della permanenza del segno segue che

$$(4) \quad u'(\bar{d}) = 0$$

e quindi $F(\bar{d}, u(\bar{d})) = u'(\bar{d}) = 0$, da cui

$$(5) \quad (\bar{d}, u(\bar{d})) \in A_0, \text{ i.e. } u(\bar{d}) = -\sqrt{\bar{d}}.$$

Ma per ogni $x \in (\bar{c}, \bar{d})$ si ha $(x, u(x)) \in A_-$ e quindi $u(x) > -\sqrt{x}$. Questo, insieme a (5), implica che

$$u'(\bar{d}) \leq -\frac{1}{2\sqrt{\bar{d}}}$$

che contraddice (4). Dunque

$$\bar{d} = +\infty, \text{ quindi anche } b = \bar{d} = +\infty.$$

In particolare, G interseca A_0 solamente in $(\bar{c}, u(\bar{c})) = (\bar{c}, -\sqrt{\bar{c}})$. Inoltre $\bar{c}$ è il punto di massimo assoluto. Poiché $u(\bar{c}) = -\sqrt{\bar{c}}$, la funzione u è negativa.

- (8) Ora sappiamo che u è strettamente decrescente in $(\bar{c}, +\infty)$. Quindi esiste $y_+ := \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) \in (-\sqrt{\bar{c}}, -\infty]$. Però non può essere $y_+ > -\infty$, perché se così fosse si avrebbe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)^2 - x}{x + 1} = -1.$$

Quindi, per x sufficientemente grande, si avrebbe $u'(x) < -1/2$ che implicherebbe subito $y_+ = -\infty$ (assurdo!). Dunque $y_+ = -\infty$.

- (9) Poiché $u \in C^1((a, b))$ e soddisfa la EDO assegnata, si ha anche $u' \in C^1((a, b))$ e quindi $u \in C^2((a, b))$. Si può osservare fin d'ora che G non può essere globalmente concavo, se no dovrebbe esistere almeno un secondo punto di intersezione fra G e A_0 (assurdo!). Possiamo provare a scoprire qualcosa di più calcolando u'' . Per ogni $x \in (a, b)$ si ha

$$\begin{aligned} u''(x) &= \frac{(2u(x)u'(x) - 1)(x + 1) - (u(x)^2 - x)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{2u(x)u'(x)(x + 1) - (x + 1) - (u(x)^2 - x)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{(u(x)^2 - x)(2u(x) - 1) - (x + 1)}{(x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Osserviamo che se $x \in (a, \bar{c}]$ allora $(x, u(x)) \in A_+ \cup A_0$, cioè

$$u(x)^2 - x \geq 0.$$

Inoltre $u(x) < 0$ e quindi $2u(x) - 1 < 0$. Infine $x + 1 > 0$. Tutto questo implica che

$$u''(x) < 0.$$

Allora, posto

$$E := \{e \in [a, b) : u''(x) \leq 0 \text{ per ogni } x \in (a, e]\}, \quad \bar{e} := \sup E,$$

si ha

$$\bar{e} > \bar{c}.$$

inoltre

$$\bar{e} < +\infty (= b),$$

altrimenti G sarebbe globalmente concavo (assurdo!). Quindi, per il teorema della permanenza del segno, si ha

$$u''(\bar{e}) = 0.$$