

Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2025/2026

3 settembre 2026 - III appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ la piramide avente per base il quadrato

$$B := [0, 1] \times [0, 1] \times \{0\}$$

e vertice in $(1, 1, 1)$. Inoltre si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := (z - x, z - y, 0).$$

Verificare che vale l'identità di Gauss (teorema della divergenza) e cioè

$$\int_E \operatorname{div} F \, dL^3 = \int_{\partial E} F \cdot N \, dH^2,$$

dove N è il campo normale esterno su ∂E .

Risoluzione. Verifichiamo che, calcolando separatamente i due membri dell'identità di Gauss, si perviene allo stesso risultato.

- Si ha

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = D_1(z - x) + D_2(z - y) + D_3 0 = -2,$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Quindi, per la linearità dell'integrale e per la compatibilità misura-integrale, si ha

$$\int_E \operatorname{div} F \, dL^3 = \int_E -2 \, dL^3 = -2 \int_E 1 \, dL^3 = -2L^3(E)$$

cioè

$$\int_E \operatorname{div} F \, dL^3 = -\frac{2}{3}.$$

- Denotiamo:

- con S_1 il triangolo chiuso di vertici $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 1, 1)$;
- con S_2 il triangolo chiuso di vertici $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 1, 1)$;
- con S_3 il triangolo chiuso di vertici $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$;

– con S_4 il triangolo chiuso di vertici $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$.

Allora

$$\partial E = B \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4.$$

Inoltre:

$$N|_{S_1} = (1, 0, 0), \quad N|_{S_2} = (0, 1, 0),$$

$$N|_{S_3} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad N|_{S_4} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

e

$$N|_B = (0, 0, -1).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial E} F \cdot N \, dH^2 &= \int_B F \cdot N \, dH^2 + \int_{S_1} F \cdot N \, dH^2 \\ &+ \int_{S_2} F \cdot N \, dH^2 + \int_{S_3} F \cdot N \, dH^2 + \int_{S_4} F \cdot N \, dH^2 \\ &= \int_B 0 \, dH^2 + \int_{S_1} (z - x) \, dH^2 \\ &+ \int_{S_2} (z - y) \, dH^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{S_3} (z - x) \, dH^2 \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{S_4} (z - y) \, dH^2. \end{aligned}$$

Osservando che

- su S_1 si ha $x = 1$,
- su S_2 si ha $y = 1$,
- su S_3 si ha $z = x$,
- su S_4 si ha $z = y$,

e usando la linearità dell'integrale e la compatibilità misura-integrale, troviamo

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_{\partial E} F \cdot N \, dH^2 &= \int_{S_1} (z - 1) \, dH^2 + \int_{S_2} (z - 1) \, dH^2 \\ &= \int_{S_1} z \, dH^2 + \int_{S_2} z \, dH^2 - H^2(S_1) - H^2(S_2). \end{aligned}$$

Si ha

$$(2) \quad H^2(S_1) = H^2(S_2) = \frac{1}{2}.$$

Inoltre, una $(2,3)$ -parametrizzazione regolare di S_1 è data da

$$\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(s, t) := (1, s, t)$$

dove $T \subset \mathbb{R}^2$ è il triangolo chiuso di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$. Quindi, essendo

$$J\varphi(s, t) = \|D_1\varphi(s, t) \times D_2\varphi(s, t)\| = \|(0, 1, 0) \times (0, 0, 1)\| = 1$$

per ogni $(s, t) \in \text{Int}(T)$, dalla formula dell'area, dal teorema di Fubini e dalla compatibilità fra gli integrali di Riemann e di Lebesgue, si ottiene

$$(3) \quad \int_{S_1=\varphi(T)} z \, dH^2 = \int_T t \, dL^2 = \int_0^1 \left(\int_0^s t \, dt \right) ds = \frac{1}{6}.$$

Analogamente,

$$(4) \quad \int_{S_2} z \, dH^2 = \frac{1}{6}.$$

Da (1), (2), (3) e (4), concludiamo che

$$\int_{\partial E} F \cdot N \, dH^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}.$$

2. Si consideri la mappa

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) := (t + \cos(2\pi t), t + \sin(2\pi t), t).$$

- (i) Verificare che γ è una $(1, 3)$ -parametrizzazione regolare.
- (ii) Indicati con $\overline{C}$ e $\overline{\Sigma}$, rispettivamente, la curva regolare orientata parametrizzata da γ e il segmento orientato congiungente $\gamma(0) = (1, 0, 0)$ (punto iniziale) a $\gamma(1) = (2, 1, 1)$ (punto finale), provare che

$$\int_{\overline{C}} (1, 1, 1) = \int_{\overline{\Sigma}} (1, 1, 1).$$

Risoluzione.

(i) Infatti:

- $[0, 1]$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ ed è la chiusura dell'aperto $(0, 1)$. Inoltre $\partial(0, 1) = \{0; 1\}$ e quindi $L^1(\partial(0, 1)) = 0$.
- $\gamma|_{(0,1)}$ è iniettiva: se $s, t \in (0, 1)$ sono t.c. $\gamma(s) = \gamma(t)$, allora (proiettando sulla terza componente) si ha $s = t$.
- La mappa γ è la restrizione a $[0, 1]$ di

$$\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Gamma(t) := (t + \cos(2\pi t), t + \sin(2\pi t), t).$$

Poiché $\Gamma \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, la mappa γ è di classe C^1 .

- Per ogni $t \in (0, 1)$ si ha

$$\gamma'(t) = (1 - 2\pi \sin(2\pi t), 1 + 2\pi \cos(2\pi t), 1)$$

e quindi anche $J\gamma(t) = |\gamma'(t)| \geq 1$.

(ii) Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\overline{C}} (1, 1, 1) &= \int_{[0,1]} (1, 1, 1) \cdot \gamma'(t) dL^1(t) \\ &= \int_0^1 (1, 1, 1) \cdot (1 - 2\pi \sin(2\pi t), 1 + 2\pi \cos(2\pi t), 1) dt \\ &= \int_0^1 (3 - 2\pi \sin(2\pi t) + 2\pi \cos(2\pi t)) dt \\ &= 3. \end{aligned}$$

Inoltre, essendo

$$\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \sigma(t) := (1 - t)\gamma(0) + t\gamma(1)$$

una $(1, 3)$ -parametrizzazione regolare di $\overline{\Sigma}$, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\Sigma}} (1, 1, 1) &= \int_{[0,1]} (1, 1, 1) \cdot \sigma'(t) \, dL^1(t) \\ &= \int_{[0,1]} (1, 1, 1) \cdot [\gamma(1) - \gamma(0)] \, dL^1(t) \\ &= \int_{[0,1]} (1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) \, dL^1(t) \\ &= \int_{[0,1]} 3 \, dL^1(t).\end{aligned}$$

Usando la linearità dell'integrale e la compatibilità misura-integrale, se ne conclude subito che

$$\int_{\overline{\Sigma}} (1, 1, 1) = 3.$$

3. Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \tan(y(x) - x) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Risoluzione. Prima di tutto, osserviamo che se $y(x)$ è una soluzione della EDO assegnata, allora $z(x) := y(x) - x$ soddisfa

$$(5) \quad z'(x) = \tan(z(x)) - 1.$$

Viceversa, se $z(x)$ è soluzione di (5) allora $y(x) := z(x) + x$ è soluzione del problema della EDO assegnata. Ora si potrebbe procedere all'integrazione esatta di (5). In questo modo, però, eccetto che per gli equilibri, e cioè le soluzioni esplicite

$$z_k(x) := \pi/4 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

si otterrebbe una identità che definisce implicitamente le soluzioni $z(x)$, ma dalla quale, in generale, è difficile ricavare le proprietà di tali soluzioni (e quindi di $y(x)$). Opteremo quindi per uno studio qualitativo del problema di Cauchy assegnato, mediante la consueta modalità basata sulla teoria sviluppata nel corso.

Consideriamo la funzione $(x, y) \mapsto \tan(y - x)$. Sia A la componente connessa del suo dominio di esistenza che contiene il dato di Cauchy $(0, 0)$, cioè

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - \pi/2 < y < x + \pi/2\}.$$

Per ogni $(x, y) \in A$ poniamo

$$F(x, y) := \tan(y - x).$$

Ovviamente si ha $F \in C^1(A)$ e quindi esiste, unica, la soluzione massimale $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ del problema di Cauchy assegnato. Useremo la teoria sviluppata nel corso per ottenere le proprietà di u .

(i) Osserviamo che $F^{-1}(0)$ è la retta $y = x$, i.e.

$$A_0 := F^{-1}(0) = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Inoltre

$$A_+ := F^{-1}((0, +\infty)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < x + \pi/2\}$$

e

$$A_- := F^{-1}((-\infty, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - \pi/2 < y < x\}.$$

- (ii) Indichiamo con G il grafico di u . Poiché, ovviamente, si ha $a < 0 < b$, possiamo considerare le funzioni

$$u_1 := u|_{(a,0)}, \quad u_2 := u|_{(0,b)}$$

i cui grafici verranno indicati, rispettivamente, con G_1 e G_2 . Osserviamo che

$$(0,0) = (0, u(0)) \in A_0 \cap G,$$

ossia G passa per $(0,0)$, dove è stazionario ($u'(0) = 0$). Quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset (a, b)$ e

$$\{(x, u(x)) : x \in (-\varepsilon, 0)\} \subset A_+, \quad \{(x, u(x)) : x \in (0, \varepsilon)\} \subset A_-$$

- (iii) Poiché G_1 non può intersecare A_0 , si ha

$$G_1 \subset A_+ \quad (\text{cioè } u_1 \text{ è crescente}).$$

Inoltre, ovviamente,

$$G_2 \subset A_- \quad (\text{cioè } u_2 \text{ è decrescente}).$$

In particolare

$$(6) \quad u(x) \leq u(0) = 0, \text{ per ogni } x \in (a, b)$$

ed esistono i limiti

$$\alpha := \lim_{x \rightarrow a^+} u(x), \quad \beta := \lim_{x \rightarrow b^-} u(x).$$

- (iv) Da quanto osservato nella premessa ($k = 0$),

$$v(x) := x + \pi/4$$

è una soluzione della EDO assegnata. Ovviamente il grafico di v è la retta $R \subset A$ di equazione $y = x + \pi/4$. Per il teorema di esistenza e unicità locale della soluzione del problema di Cauchy, G non può intersecare R . Quindi

$$(7) \quad x - \pi/2 < u(x) < x + \pi/4, \text{ per ogni } x \in (a, b).$$

- (v) Per (6) e (7) si ha

$$x - \pi/2 < 0, \text{ per ogni } x \in (a, b)$$

e quindi

$$b \leq \pi/2 < +\infty.$$

Facendo tendere $x \rightarrow b^-$ in (7), otteniamo ora

$$-\infty < b - \pi/2 \leq \beta \leq b + \pi/4 < +\infty.$$

Per il teorema di incontinenza non si può avere $(b, \beta) \in A$ e dunque si ha

$$\beta = b - \pi/2.$$

(vi) In conseguenza di (7) e di (v) si ha

$$\lim_{x \rightarrow b^-} u'(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \tan(u(x) - x) = -\infty,$$

cioè (per dirla informalmente) G_2 si approssima a ∂A con pendenza verticale.

(vii) Verifichiamo che $a = -\infty$. Infatti, se fosse $a > -\infty$, per (iii) e (7) si avrebbe

$$-\infty < a \leq \alpha \leq a + \pi/4 < +\infty$$

e quindi, in particolare,

$$P_1 := \lim_{x \rightarrow a^+} (x, u(x)) = (a, \alpha) \in A.$$

Utilizzando ora il teorema di incontinenza, otteniamo facilmente una contraddizione (basta scegliere $K := P_1 + [0, \varepsilon]^2$, con $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo affinché si abbia $K \subset A$). Dobbiamo quindi concludere che $a = -\infty$.

(viii) Poiché $u \in C^1((-\infty, b))$ soddisfa la EDO assegnata, si ha anche $u \in C^2((-\infty, b))$. Quindi possiamo derivare l'identità $u'(x) = \tan(u(x) - x)$ e così ottenere

$$\begin{aligned} u''(x) &= [1 + \tan^2(u(x) - x)][u'(x) - 1] \\ &= [1 + \tan^2(u(x) - x)][\tan(u(x) - x) - 1], \end{aligned}$$

per ogni $x \in (-\infty, b)$. Poiché per (7) si ha $-\pi/2 < u(x) - x < \pi/4$ e quindi anche $\tan(u(x) - x) < 1$ (per ogni $x \in (-\infty, b)$), otteniamo

$$u''(x) < 0, \text{ per ogni } x \in (-\infty, b).$$

Il grafico G è dunque concavo.

(ix) Per (viii), la funzione u' decresce. In particolare esiste

$$L := \lim_{x \rightarrow -\infty} u'(x).$$

Osserviamo che:

- $L \geq 0$, per (iii);
- non si può avere $L < 1$, perché in tal caso G_1 intersecherebbe la retta R ;
- non si può avere $L > 1$, perché in tal caso G_1 intersecherebbe la retta A_0 .

Quindi $L = 1$, da cui segue

$$(8) \quad 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} u'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan(u(x) - x).$$

Inoltre, per (iii) e (7), si ha

$$(9) \quad x < u(x) < x + \pi/4, \text{ per ogni } x \in (-\infty, 0).$$

Da (8) e (9) segue che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) - x = \pi/4,$$

cioè

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) - (x + \pi/4) = 0.$$

Questo prova che la retta R di equazione $y = x + \pi/4$ è asintoto di G , per $x \rightarrow -\infty$.

